Minicursos A

3 a 5 de dezembro de 2012

Título: A matemática de embaralhar cartas
Eixo Temático: Belos Problemas e Belas Soluções
Palestrante: Roberto Imbuzeiro Oliveira e Marcelo Hilário

Título: Aplicação e exploração da tecnologia no ensino do Cálculo: os softwares Geogebra e o CAS Maple
Eixo Temático: Laboratórios de Ensino de Matemática
Palestrante: Francisco Regis Vieira Alves

Título: Aritmética Linear
Eixo Temático: Tópicos Especiais em Matemática
Palestrante: Rodrigo Gondim

Título: Conexões Extremas em Ladrilhos Hexagonais
Eixo Temático: Laboratórios de Ensino de Matemática
Palestrante: Izabelly Marya Lucena da Silva

Título: Decodificação na Presença do Valor Semântico do Erro
Eixo Temático: Temas Interdisciplinares
Palestrante: Luciano Panek

Título: Média Aritmética: uma abordagem abrangente é necessária?
Eixo Temático: Laboratórios de Ensino de Matemática
Palestrante: Paulo Jorge Magalhães Teixeira

Título: Princípios de Escolha em Análise e Topologia
Eixo Temático: Tópicos Especiais em Matemática
Palestrante: Samuel G. da Silva

Título: Rotações Quatérnions e Álgebras de Clifford
Eixo Temático: Tópicos Especiais em Matemática
Palestrante: Eliezer Batista

Título: Sistemas Impulsivos Autônomos
Eixo Temático: Tópicos Especiais em Matemática
Palestrante: Marta Cilene Gadotti

Título: Uma introdução à identificação de sistemas dinâmicos caóticos
Eixo Temático: Tópicos Especiais em Matemática
Palestrante: Kennedy Martins Pedroso

Proposta de minicurso para a VI Bienal de Matemática

"A matemática de embaralhar cartas"

16 de agosto de 2012

1 Proponentes

1. **Marcelo Richard Hilário**
   (a) Doutor em Matemática pelo IMPA (2011).
   (b) Professor adjunto I de Matemática na UFMG desde 2011.
   (c) CV Lattes: `http://lattes.cnpq.br/2075091409733505`
   (d) Email: `mhilario@mat.ufmg.br`
2. **Roberto Imbuzeiro Oliveira**.
   (a) PhD em Matemática pelo Courant Institute, New York University (2004).
   (b) Bolsista PQ 2 do CNPq.
   (c) Pesquisador do IMPA desde 2006, atualmente no nível de pesquisador associado.
   (d) Sítio Web: `http://w3.impa.br/~rimfo/`.
   (e) CV Lattes: `http://lattes.cnpq.br/8861097282658615`
   (f) Email: `rimfo@impa.br`

2 Formato proposto

Planejamos um curso de seis horas, divididas em três aulas. Caso seja possível, gostaríamos que duas destas aulas pudessem acontecer no mesmo dia.

3 Assunto e abordagem

Em 1990 o famoso jornal americano *New York Times* publicou um artigo no qual se dizia que sete embaralhadas são necessárias e suficientes para misturar bem um baralho com as 52 cartas habituais. O autor do artigo se referia a um teorema de Dave Bayer e Persi Diaconis publicado em 1992 [2]. Este resultado se tornou famoso não só pelo interesse de cassinos e jogadores, mas também pela matemática envolvida. Misturando Probabilidade com Combinatória Algébrica e Teoria de Representações de grupos finitos, estes autores abriram direções de investigação que suscitam grande interesse até hoje.

O objetivo do nosso curso é explicar a matemática relacionada ao embaralhamento de cartas de uma forma acessível e atraente. O curso terá um teorema principal, de Aldous e Diaconis [1], que diz que 12 embaralhadas bastam para 54 cartas e que dá estimativas similares para outros tamanhos de baralho. Provaremos este resultado integralmente e de forma auto-contida, partindo dos aspectos mais básicos da modelagem do embaralhamento. Também discutiremos, de maneira mais informal, como Bayer e Diaconis procederam para conseguir seu resultado mais forte. Por fim, apresentaremos um breve panorama de avanços recentes e problemas relacionados aos resultados dos artigos que citamos.

Além deste conteúdo matemático, também apresentaremos aos participantes um pouco da vida e da obra de Persi Diaconis. Co-autor dos dois artigos citados, Diaconis é uma das figuras mais singulares da Matemática e da Estatística, com interesses que vão desde métodos sofisticados de simulação até a mágica, que praticou profissionalmente antes de ingressar no doutorado. Se a Matemática do curso mostra a integração de diversas áreas, Diaconis demonstra, de forma muito idiosincrática, como as áreas e interesses matemáticos podem se misturar com a vida cotidiana.

4 Planejamento das aulas

4.1 Introdução

Estimativa de tempo: 30 minutos (aula 1)
Referências principais: [3, 2, 4]

Começaremos nosso curso falando informalmente do trabalho de Bayer e Diaconis sobre 7 embaralhadas. Falaremos de como este artigo foi recebido por apostadores e cassinos e discutiremos muito brevemente alguns desdobramentos recentes (como que 4 embaralhadas bastariam para *blackjack* e outros jogos). Apresentaremos um pouco da vida e da obra de Persi Diaconis, incluindo seus interesses gerais por passeios aleatórios.

4.2 O grupo simétrico, ou: onde mora o embaralhamento?

Estimativa de tempo: 50 minutos (aula 1)
Referências principais: [6, 1, 5]

A principal mensagem desta seção é que embaralhar n cartas significa *permutá-las*. Portanto, uma seqüência de embaralhamentos corresponde a uma composição de permutações. Isto nos leva naturalmente ao grupo simétrico S_n como lugar onde acontece o processo de embaralhamento. Estudaremos alguns aspectos deste grupo, como:

- *Fatos elementares:*
  - definição de permutação;
  - relação com ordenar e embaralhar cartas;
  - número de elementos em S_n.
- *Maneiras de representar e descrever permutações:* funções, diagramas, palavras, etc.
- *Estrutura de grupo:* composição, identidade, permutação inversa.

4.3 Acaso e probabilidade em S_n

Estimativa de tempo: 80 minutos (40 minutos na aula 1 + 40 minutos na aula 2)
Referências principais: [6]

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos básicos de probabilidade sobre conjuntos finitos, com foco particular sobre S_n. Eis alguns dos principais pontos a serem abordados:

- *O que é uma distribuição de probabilidade:*
  - definição formal;
  - formas e exemplos de distribuições;
  - como definir distribuições novas a partir de antigas.
- *Independência:* escolhas independentes e distribuições-produto. Lançamentos de moeda justa.
- *Permutações aleatórias:*

  - distribuições sobre S_n obtidas através de escolhas e operações aleatórias com cartas;
  - convoluções e a distribuição de composições de permutações independentes.

- *A distribuição uniforme sobre S_n:*
  - definição;
  - invariância por operações de grupo e convoluções;
  - como gerar exatamente a distribuição uniforme;
  - porque é boa ideia misturar as cartas uniformemente.

- *Falsa uniformidade:* distribuições que parecem uniformes, mas estão longe disto.

- *Aproximando a distribuição uniforme:* distância de variação total e suas interpretações. Formulação do nosso problema geral.

4.4 Modelando o embaralhamento

Estimativa de tempo: 30 minutos (aula 2)
Referências principais: [1, 2]

Nesta seção discutiremos em profundidade alguns modelos de embaralhamento. O principal deles é o de Gilbert-Shannon-Reeds, bastante realista, que é o analisado nas nossas referências principais. Outros modelos incluem o de transposições aleatórias e o "de-cima-para-o-acaso"(*top-to-random*).

4.5 Tempos uniformes fortes: apresentação e um exemplo simples

Estimativa de tempo: 40 minutos (aula 2)
Referências principais: [1]

Aqui apresentaremos a nossa técnica para provar o teorema de Aldous e Diaconis, que é baseada em tempos uniformes fortes. Grosso modo, um tempo uniforme forte é um momento T em que podemos parar o processo com a certeza de que, independentemente de quanto tempo se passou, a distribuição do processo é uniforme. Se isto é verdade, pode-se usar T para computar a distância entre a distribuição do processo até a distribuição estacionária. Eis os tópicos da seção:

- *Uma ilustração:* como o embaralhamento "de-cima-para-o-acaso" vai construindo uma permutação aleatória.
- *Tempos uniformes fortes:* definição e resultado sobre como usá-los para estimar a distância até a distribuição uniforme.
- *De-cima-para-o-acaso:* argumento formal para este embaralhamento e esboço de que ele é quase ótimo.

4.6 Doze embaralhamentos bastam

Estimativa de tempo: 50 minutos (aula 3)
Referências principais: [1]

Nesta seção apresentamos a análise do modelo de Gilbert-Shannon-Reeds que foi feita por Aldous e Diaconis em [1].

- *Enunciado formal do teorema.*
- *O processo invertido:*
  - como e porque usar a distribuição invertida;
  - "invertendo" a distribuição GSR.
- *O tempo uniforme:* construção do tempo de parada forte T para o processo invertido.
- *Fim da prova:* cálculo explícito e estimativa assintótica de $\Pr[T > t]$ e aplicação na prova do teorema.

4.7 Como chegar a sete embaralhamentos

Estimativa de tempo: 30 minutos (aula 3)
Referências principais: [6, 2]

Apresentada a prova do teorema principal do curso, discutiremos informalmente as principais ideias e conseqüências do teorema de Bayer e Diaconis que motiva o curso. Por um lado, explicaremos o papel da Análise de Fourier e da Teoria de Representações nesta prova. Por outro lado, mostraremos que este processo tem a propriedade de convergência abrupta ao equilíbrio, chamada de *cutoff effect* na literatura.

4.8 Desdobramentos e novos caminhos

Estimativa de tempo: 40 minutos (aula 3)
Referências principais: [6, 3, 4]

Nesta última seção (que poderá ser abreviada, caso falte tempo), procuraremos descrever alguns avanços recentes relacionados às permutações aleatórias, convergência abrupta e outras espécies de problemas relacionados a passeios aleatórios, com base nas referências acima. Enfatizaremos as contribuições de Diaconis e falaremos um pouco mais sobre este matemático.

5 Notas de aula

Planejamos submeter notas de aula para publicação na Bienal. Elas seguirão aproximadamente a divisão em seções que acabamos de apresentar.

Referências

[1] David Aldous and Persi Diaconis. Shuffling cards and stopping times. *American Mathematical Monthly*, 93(5):233–348, 1986.

[2] Dave Bayer and Persi Diaconis. Trailing the dovetail shuffle to its lair. *Annals of Applied Probability*, 2(2):294–313, 1992.

[3] Persi Diaconis. The Markov chain Monte Carlo revolution. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46(2):179–205, November 2008.

[4] Sami Assaf Persi Diaconis and K. Soundararajan. A rule of thumb for riffle shuffling. *Annals of Applied Probability*, 21(3):843–875, 2011.

[5] Arnaldo Garcia e Yves Lequain. *Elementos de Álgebra*, volume CPE21 of *Projeto Euclides*. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e IMPA, 2012.

[6] David A. Levin, Yuval Peres, and Elizabeth L. Wilmer. *Markov Chains and Mixing Times*. American Mathematical Society, 2008.

Aplicação e exploração da tecnologia no ensino do Cálculo: os *softwares Geogebra* e o *CAS Maple*

Francisco Regis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE, *E-mail:* fregis@ifce.edu.br

Hermínio Borges Neto

Universidade Federal do Ceará – UFC, E-mail: Hermínio@ufc.com.br

Neste trabalho, apresenta-se uma proposta de mini-curso envolvendo a aplicação e situações de exploração da tecnologia no ensino de Cálculo e Análise Real. Damos ênfase ao uso dos *softwares Geogebra* e *Maple*. Assim, discutiremos alguns exemplos interessantes no Cálculo que admitem uma significação imediata em Análise Real e, com o *Geogebra*, proporcionamos uma interpretação geométrica, apoiando o raciocínio inicial do aprendiz, em busca de uma formalização. Por outro lado, no contexto do Cálculo a Várias Variáveis, que possui como fundamento a Análise no IR^n, muitos conceitos importantes podem ser explorados de um ponto de vista menos algorítmico com arrimo do *CAS Maple*. Outrossim, a qualidade questionável dos livros de Cálculo preserva o caráter da memorização e aplicação automática de fórmulas e teoremas. A tecnologia pode atuar como fator de um entendimento conceitual.

Introdução

Não podemos negar os benefícios oriundos da tecnologia com respeito ao ensino de Matemática, tanto no que se refere ao contexto escolar, como no caso do *locus* acadêmico. Neste ambiente, restringimos nosso interesse e direcionaremos um olhar em relação ao ensino do Cálculo em Uma Variável Real – CUV e ao Cálculo a Várias Variáveis – CVV. Acrescentamos, todavia, algumas considerações pertinentes ao ensino de Análise Real.

Sublinhamos nossa inspiração inicial a partir dos conteúdos em vídeo elaborados por Lima (2010; 2011). Nestes vídeos, pudemos colher impressões a respeito de abordagem e a orientação concernente a mediação adequada na condução de disciplinas como *Análise Real* e *Análise no* IR^n que, permitem extrair profícuos ensinamentos para o ensino do Cálculo no *locus* acadêmico

Assim, com atenção nas perspectivas de Lima (2010, 2011), descrevemos aplicações e a exploração de dois *softwares* de Matemática. O primeiro,

nominado *Geogebra*, se destaca por ser livre e proporciona a exploração de propriedades geométricas relacionadas ao gráfico de funções, inexequiveis no contexto lápis/papel. O segundo é o *CAS Maple*, que se caracteriza como um sistema algébrico computacional. Possui a capacidade de exploração e aplicação em ramos avançados em Matemática, tais como: Álgebra Linear, Equações Diferenciais, Cálculo, etc..

Esse *software* foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores da Universidade Waterloo, Canadá. Sua primeira versão data de 1980. Alguns comandos do *Maple* são de uso específico, assim, são agrupados em pacotes (*packages*). Para ativar um package, escrevemos: **with(LinearAlgebra):** ou **with(plots)**, ou ainda **with(linalg)**. Neste minicurso, nossa proposta se restringe ao uso do package **with(plots)** que possibilita um tratamento e plotagem de gráficos. Recordamos, entretanto, que nossa discussão vai ao sentido do apoio de um aluno ou professor de graduação, e não de um *expert* em computação ou programação.

1. Sobre o uso do *software Geogebra* no ensino do Cálculo

A visualização tem sido um instrumento profícuo na atividade de investigação em Matemática. De fato, eminentes matemáticos (POINCARÉ, 1899) registram e enaltecem o papel da visualização, nos momentos que antecedem a formalização e uso da prova rigorosa matemática. Neste minicurso, nos apoiamos nas ideias concernentes ao ensino, devidas às figuras emblemáticas do passado que preservam sua importância até os dias de hoje.

Assim, podemos explorar a capacidade de visualização no CUV, empregando, no ensino do Cálculo em Uma Variável Real – CUV, o *software* livre *Geogebra*. Nos conteúdos previstos no ensino do CUV, estudantes aprendem inicialmente a noção de limites do tipo: $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (GUIDORIZZI, 2008).

Tanto nos livros de *Análise Real* como nos livros de Cálculo, gráficos de funções classicamente abordadas pelos autores, tais como $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ ou $x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$, são inexequíveis de se esboçar seus gráficos, sem o auxilio computacional, todavia, com alguns comandos básicos do *Geogebra*, obtemos seu comportamento que exibimos na figura 1. No caso do gráfico da figura 1, lado esquerdo, os alunos devem compreender

que apesar de possuir um gráfico limitado nas vizinhanças da origem, a imagem oscila cada vez mais rápido, na medida em que $x \to 0$. Assim, não existe o limite $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$, enquanto que $\lim_{x\to 0} x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, pois as oscilações das imagens tendem a diminuir, se aproximando de um único valor, na medida em que $x \to 0$, com $x \neq 0$.

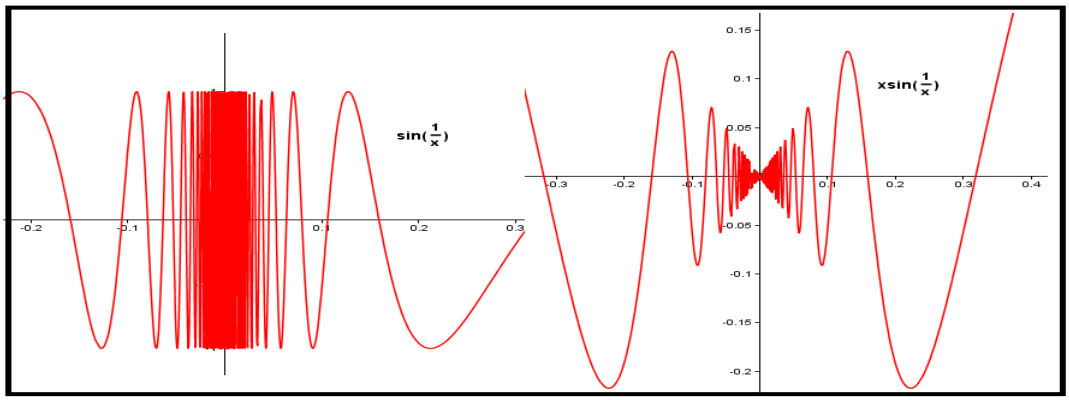


Figura 1: Gráficos gerados pelo *software Geogebra*

Notemos na figura acima que o programa desconsidera pontos nos quais a expressão $x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ não está definida, por exemplo, em $x = 0$, entretanto, fazemos uma pequena modificação (figura 2) a fim de aproximarmos o modelo geométrico computacional, do modelo matemático formal descrito por $x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$, para $x \neq 0$.

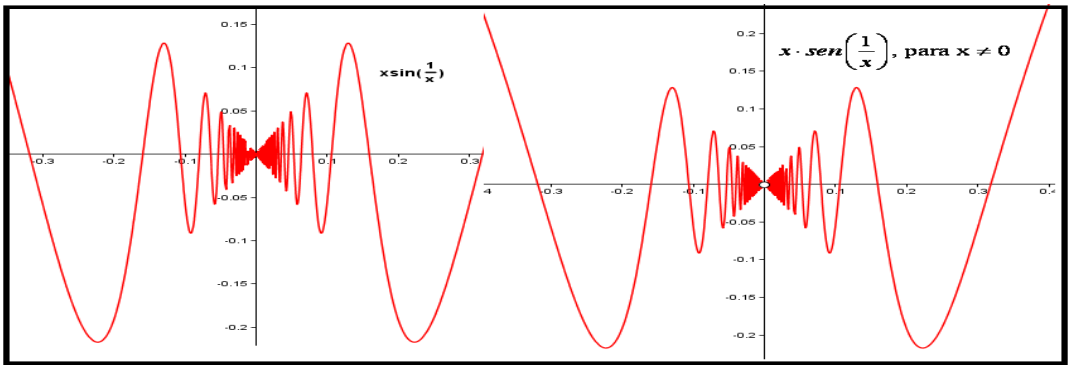


Figura 2: Modificação do gráfico de acordo com o modelo matemático formal

Lima (2010, p. 230) considera as seguintes funções: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}} \\ 0 \text{ se x=0} \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} \frac{sen(1/x)}{1+e^{1/x}} \text{ se x} \neq 0 \\ 0 \text{ se x=0} \end{cases}$. Leithold (1990, p. 101-102) explica que a

descontinuidade removível permite redefinir a função, tornando-a contínua no ponto. De outro modo, temos uma *descontinuidade essencial*, como no caso das funções da figura 3. Geometricamente, com arrimo na figura 3, percebemos que o ponto $x=0$ é um ponto de descontinuidade de $f(x)$, ademais, $1=\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$. Mas reparemos que o gráfico descrito pelo *software* nos informa que $\lim_{x\to 0^+} g(x)=0$, todavia, o gráfico deve comunicar que o limite $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ não existe.

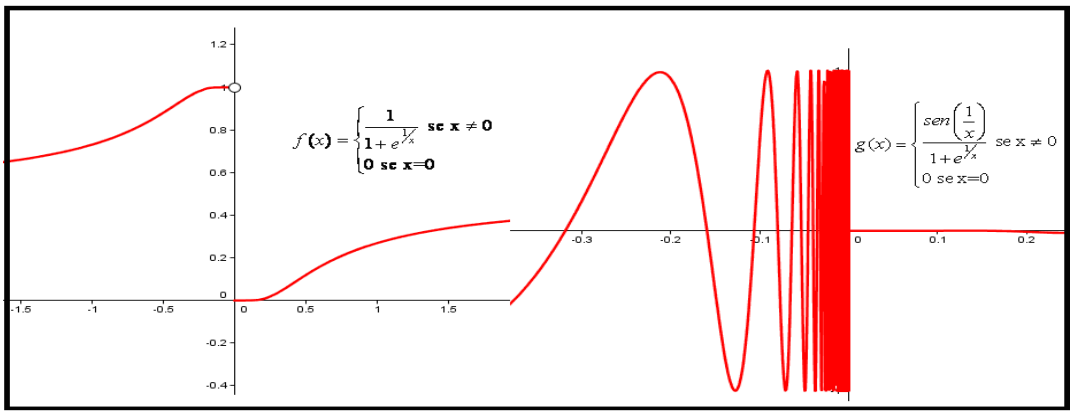


Figura 3: Descrição da noção de descontinuidade no contexto do CUV

Para concluir, sublinhamos algumas limitações do *software Geogebra*. Neste sentido, exibimos na figura 4, o gráfico da função $|x^2-1|$. Com amparo no modelo matemático formal, inferimos que $f'_-(-1)\neq f'_+(-1)$ e $f'_-(1)\neq f'_+(1)$. A partir da interpretação *standard* do Cálculo, dizemos que a função $|x^2-1|$ não é derivável ou diferenciável nos pontos -1 e 1. Geometricamente, não deve existir uma reta tangente ao seu gráfico, entretanto, o *software* permite descrever uma reta em ambos os pontos, como evidenciamos na figura 4, o que pode influenciar a interpretação do estudante.

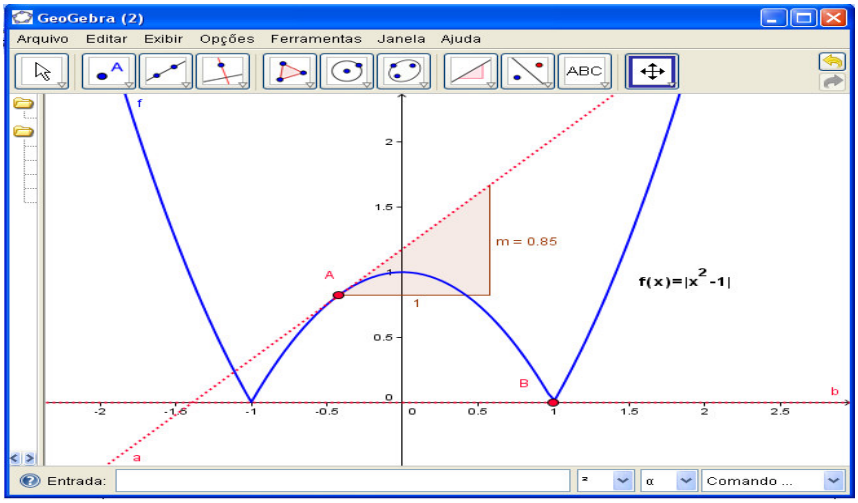


Figura 4: O *Geogebra* exibe uma reta tangente nos pontos aonde não há *diferenciabilidade*

2. Explorando alguns conceitos de *Análise Real*

Muitas propriedades relacionadas com a noção de *sequências de números reais* $(x_n)_{\in IN}$ podem ser exploradas de modo intuitivo que auxiliam na fixação dos sentidos/significados dos conceitos. Por exemplo, vamos considerar as sequências descritas por $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot n}{n^2+1}$, $y_n = sen\left(\dfrac{n \cdot \pi}{2}\right)$ ou $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. No caso da primeira sequência, conduzimos o aluno a perceber a existência de duas subseqüências $\left(x_{n_k}\right)_{n_k \in IN'}$ e $\left(x_{n_k'}\right)_{n_k' \in IN''}$, que se aproximam para o mesmo valor de aderência, que neste caso é 0.

Por outro lado, no caso da sequência $y_n = sen(n \cdot \pi/2)$, o aluno deve suspeitar da existência de três valores de aderência correspondentes a três subseqüências distintas. Neste caso, os valores de aderência destas subsequências estão no conjunto $\{-1,0,1\}$.

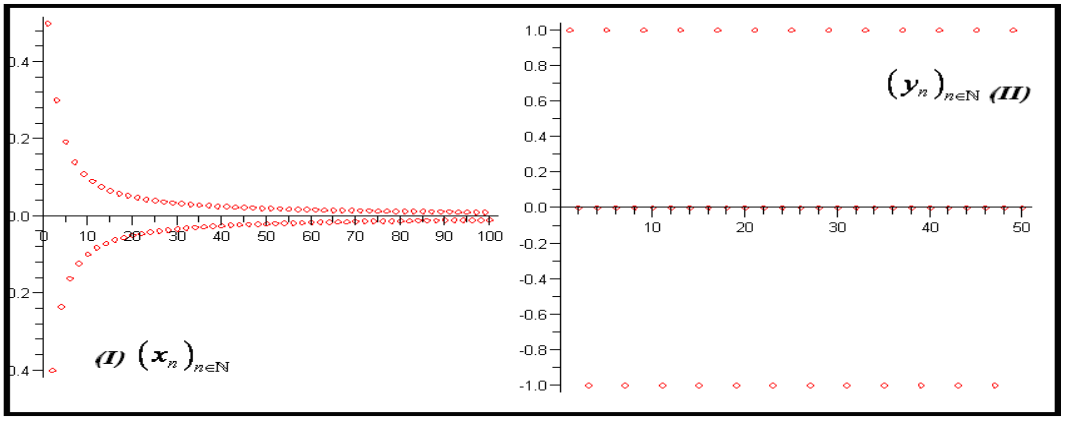


Figura 5: Propriedades geométricas de sequências divergentes

No contexto da *Análise em* IR, Lima (2010, p.) explica que na figura 3, temos descontinuidades de primeira e segunda espécie. Temos um caso de descontinuidade de primeira espécie em relação à $f(x)$, enquanto que no caso de $g(x)$ temos uma descontinuidade de segunda espécie, pois, o gráfico deve informar ao aluno que $x=0$ é um ponto de acumulação à esquerda, todavia, o limite $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ não existe.

Lima (2010, p. 364) explica que há *convergência pontual* das funções descritas por $f_n(x) = x^n \cdot (1-x^n)$, para $n \geq 0$. Abrimos o *package* com os comandos:

```
> with(plots);
> plot({seq(1-(1-x^i)^(1/i),i=1..10)},x=0..1,color=red);
```

E obtemos, assim, o comportamento gráfico da série de funções descritas por $f_n(x) = (1-(1-x^n)^{1/n}$. No caso das funções $f_n(x) = x^n \cdot (1-x^n)$, a modificação é imediata no comandos abaixo: **plot({seq(x^i*(1-x^i),i=1..10)},x=0..1,color=red).** Na figura 6 divisamos que o valor máximo de $f_n(x)$ é $0,25$. Lima (2010, p. 364) explica que cada gráfico apresenta um "calombo", cuja altura se mantém constante, igual a $1/4$, de modo que, quando $n \to \infty$, a forma do gráfico de f_n não se aproxima da forma do gráfico da função limite.".

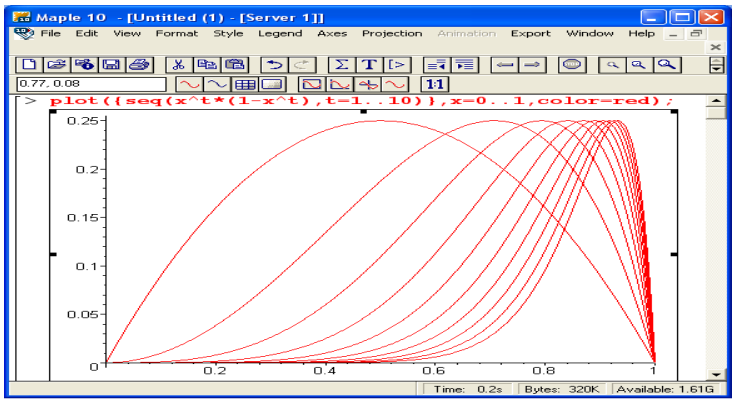


Figura 6: O apelo metafórico de Lima (2010) na explicação da noção de convergência pontual

Com o auxilio do *CAS Maple*, descrevemos o gráfico da família de funções descritas por $f_n(x) = x^n$ para $x \in [0,\delta]$ e $\delta<1$. Lima (2010, p. 365) discute a *convergência uniforme*, para valores $\delta < 1$. Na figura 7 percebemos a faixa que se pode considerar afim de que possamos avaliar a *convergência uniforme*.

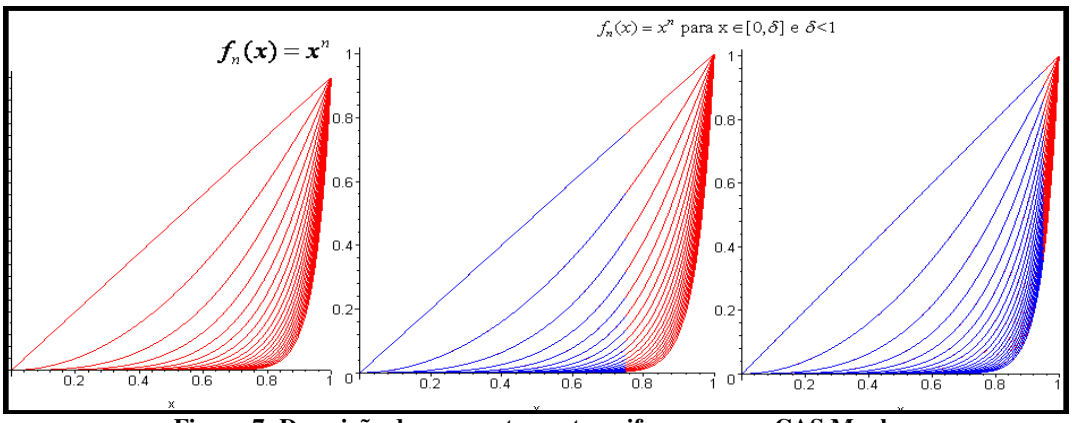


Figura 7: Descrição do comportamento uniforme com o CAS Maple

Nos exemplos exibidos nas figuras 6 e 7, evidenciamos comportamentos gráficos que não se pode descrever usando o *Geogebra*. Assim, no próximo segmento, evidenciaremos a exploração de conceitos do Cálculo a Várias Variáveis que podemos discutir apenas com o *CAS Maple*.

3. Aplicações do CAS – *Computer Algebric System - Maple* no ensino do Cálculo a Várias Variáveis

Reconhecidamente, a mudança e a complexidade de simbologias do CVV em relação ao CUV proporcionam dificuldades na condução do ensino deste conteúdo (ALVES, 2011). Por exemplo, vamos considerar as seguintes funções $r(x)=\dfrac{sen(x^2)}{x^2}$ e $r(x,y)=\dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (ver figura 8).

Por intermédio da lista de comandos:

```
> with(plots);
> plot3d((sin(x^2+y^2))/(x^2+y^2),x=-3..3,y=-3..3);
> spacecurve([0,y,sin(y^2)/(y^2)],y=-3..3,color=blue,thickness=3);
> display(%,%%);
> spacecurve([x,0,sin(x^2)/(x^2)],x=-3..3,color=red,thickness=3);
> display(%,%%);
```

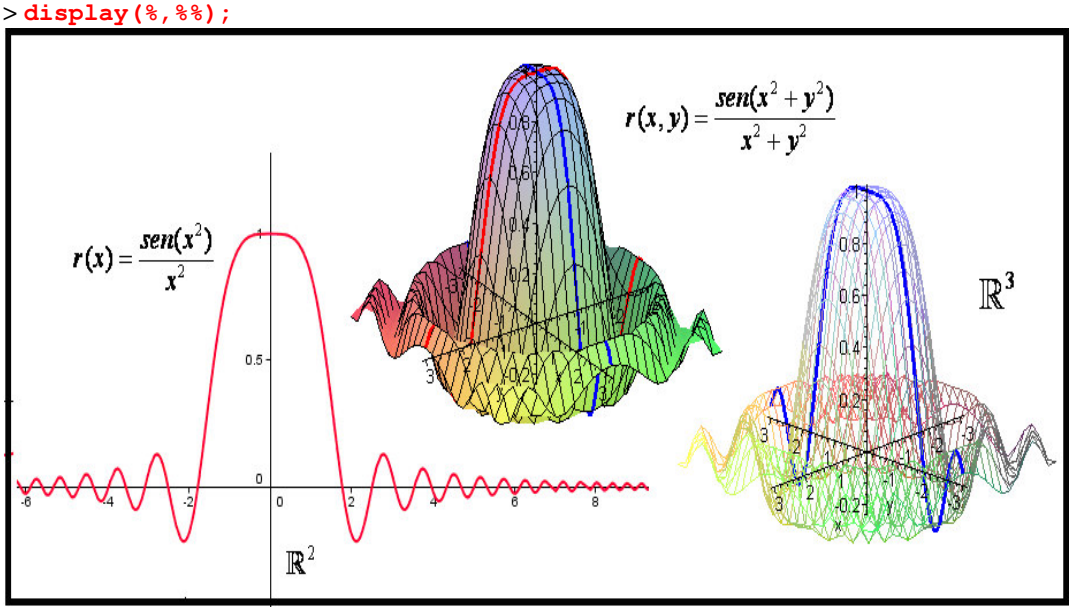


Figura 8: Exploração do caráter limitado de funções no CUV e no CVV

Para a obtenção dos gráficos acima, no caso do *Maple*, empregamos o comando **display** que permite a produção de interseção de no máximo três objetos no IR^2 ou no IR^3. Ainda com o auxilio computacional, podemos explorar certos conceitos do CUV no contexto do CVV. Com efeito, com o uso do comando **plot3d** descrevemos o gráfico da superfície no IR^3 descrita por $f(x,y)=x^3y-xy^3$ (ANDRADE, 2004). Na figura 9, podemos aplicar os conhecimentos do Cálculo em Uma Variável Real e identificar pontos de inflexão e extremantes na borda da superfície. Na figura destacamos em vermelho estes pontos.

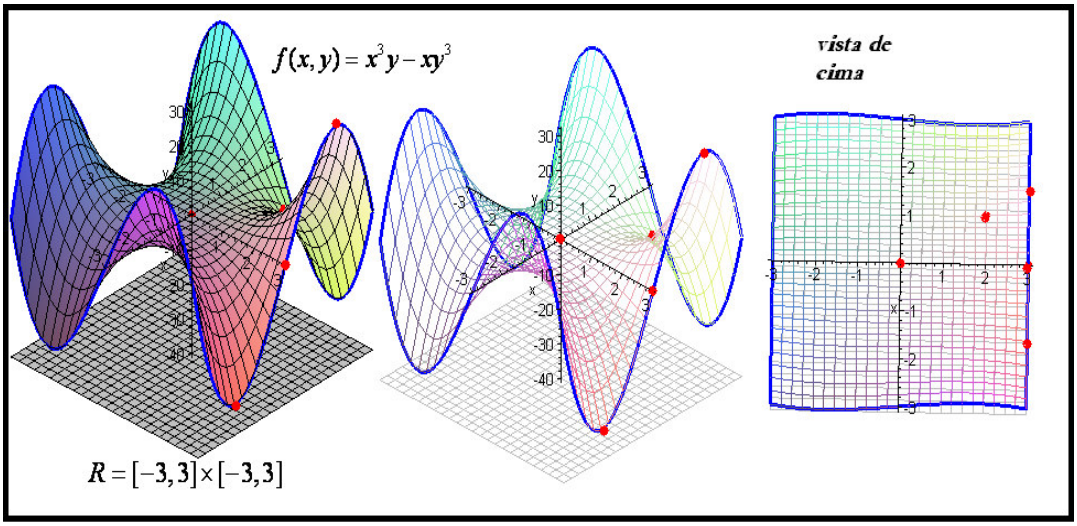


Figura 9: O *CAS Maple* permite a visualização e entendimento topológico de pontos interiores e pontos de fronteira em uma superfície

Exploramos os comandos **contourplot** ou **contourplot3d** no sentido de descrever o comportamento das curvas de nível da superfície $f(x,y) = x^3y - xy^3$. Reparemos na figura 10 que a presença de curvas abertas, que se assemelham à *hipérboles* dão a indicação de *pontos de sela* ou pontos nos quais o *teste da Hessiana* é inconclusivo. Existem comandos que possibilitam a variação de cores das curvas de nível e permitem relacionar ao comportamento do vetor gradiente, indicando regiões no plano de maior ou menor variação da função (figura 10).

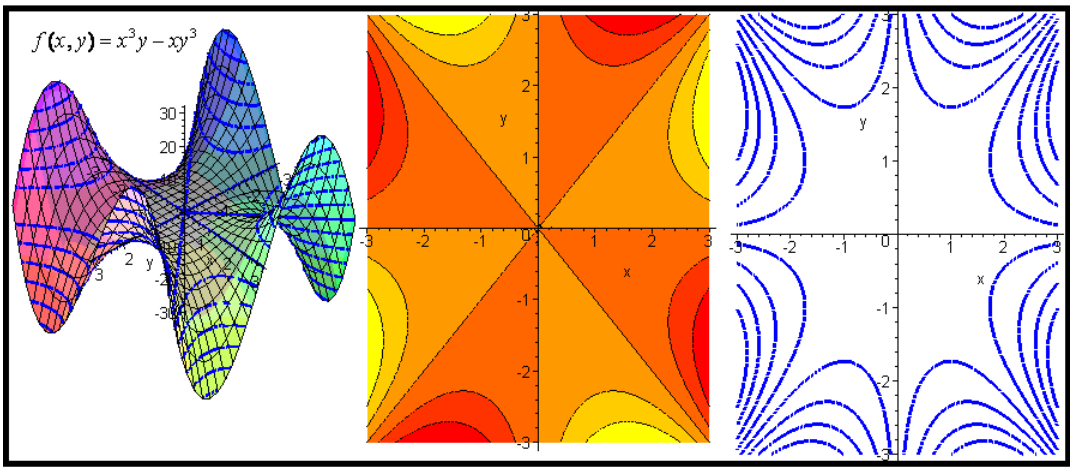


Figura 10: Descrição da superfície e suas curvas de nível no IR^2 e IR^3.

Na figura 11 trazemos algumas *superfícies de nível* associadas à função $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + x^2y$ e também com $g(x,y,z) = (xy+z)\cdot e^{-x^2-y^2-z^2}$. A partir do teste da Hessiana, podemos analisar, formalmente, a descrição de pontos extremantes dessas funções, todavia, com base apenas nos gráficos abaixo, como decidir se temos pontos extremos ou pontos de sela? De que modo os autores (GUIDORIZZI, 2010) de livros exploram esses conceitos?

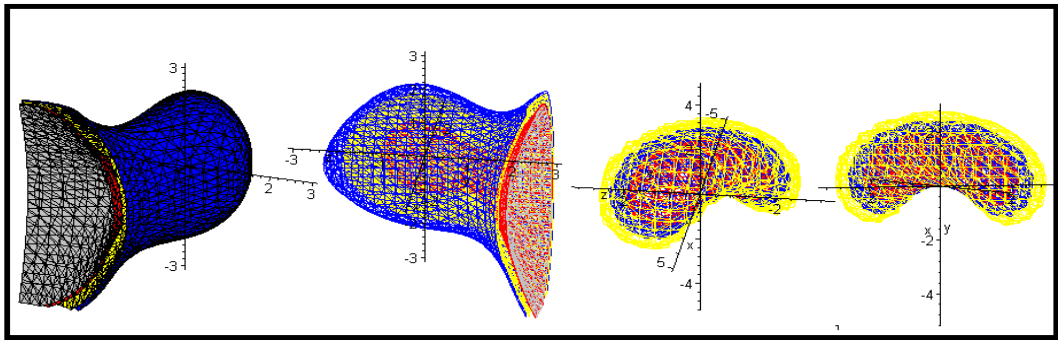


Figura 11: Exploração do comportamento de superfícies de nível com o Maple

Outro conceito importante no CVV diz respeito ao estudo de integrais *múltiplas* – IM. Com auxilio do *Maple* podemos levar o estudante ao entendimento geométrico para a determinação dos limites de integração em IM do tipo $\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)dxdydz$.

Para concluir, o *CAS Maple* possui uma diversidade de comandos que efetuam o cálculo algébrico pertinente aos conceitos de limite, derivada e integral. De fato, os comandos **limit**, **diff**, **int** possibilitam a obtenção de resultados que, quando restritos ao ambiente lápis/papel, tornam a tarefa fastidiosa. Por exemplo, consideremos a função $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ que, aparentemente, é a única conhecida pelos autores de livros de Cálculo que não satisfaz a propriedade $\dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y)$. Por outro lado, o *CAS Maple* efetua apenas os cálculos fora da origem, como vemos na tabela abaixo.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]$	$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{6y}{x^2+y^2} - \dfrac{30x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{24x^4y}{(x^2+y^2)^3}$
$\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$	$\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}\right) = -\dfrac{18x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{24x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}$
$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]$	$\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{6x}{x^2+y^2} - \dfrac{12xy^2}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{6x^3}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{24x^3y^2}{(x^2+y^2)^3}$
$\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]$	$\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}\right) = \dfrac{6x}{x^2+y^2} - \dfrac{12xy^2}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{6x^3}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{24x^3y^2}{(x^2+y^2)^3}$

Fonte: os autores.

As expressões acima são obtidas facilmente com os comandos:

```
> f:=x*y*(x^2-y^2)/(x^2+y^2);
> Diff(f,x)=diff(f,x);
> Diff(f,y)=diff(f,y);
> Diff(f,x,x)=diff(f,x,x);
> Diff(f,y,y)=diff(f,y,y);
> Diff(f,x,y)=diff(f,x,y);
```

```
> Diff(f,y,x)=diff(f,y,x);
```

4. Considerações finais

O que será discutido neste mini-curso não se destina ao *expert* em computação, mas sim, aos alunos e professores que tencionam, de algum modo, introduzir formas diferenciadas de interpretação dos conceitos do Cálculo e em Análise Real. Neste trabalho buscamos evidenciar a interpretação geométrica dos conceitos que pode se tornar inexeqüível quando restringimos as atividades dos estudantes ao lápis/papel. Por exemplo, na figura 11 descrevemos o comportamento de um campo vetorial $\vec{F}(x,y,z)$ (em azul) e o comportamento do seu rotacional (em vermelho). Por esta via geométrica, sob ação deste campo, poderemos prever se um bastão, com base pequena, manifesta um movimento de rotação, sob ação deste campo, na medida em que se desloca no espaço IR^3.

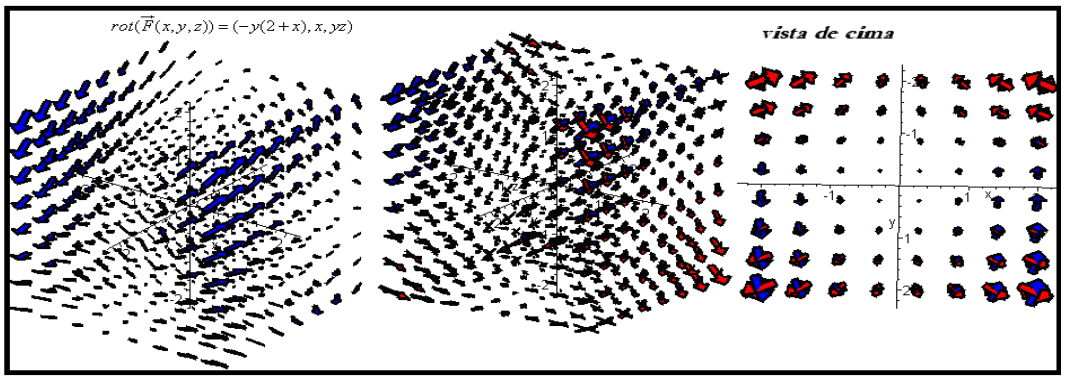


Figura 12: Descrição geométrica de campos vetoriais e a noção de rotacional com o *Maple*

Referências

[1] ANDRADE. Lenimar. N. (2004). Introdução à Computação Algébrica com o *Maple*. Rio de Janeiro: SBM.

[2] ALVES, Francisco. R. V. (2011). Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, p. 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php

[3] GUIDORIZZI, Hamilton. L. *Um curso de Cálculo*, v. 1, 5ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[4] GUIDORIZZI, Hamilton. L. *Um curso de Cálculo*, v. 2, 5ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[5] LEITHOLD. Louis. (1990). O Cálculo com Geometria Analítica. 3ª edição. São Paulo: Harbra.

[6] LIMA. Elon. L. (2009). Curso de Análise. vol. 2, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: SBM.

[7] LIMA. Elon. L. (2010). Curso de Análise. vol. 1, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: SBM.

[6]POINCARÉ, H. (1899). La logique et l´intuition dans la science mathématique, L´enseignement Mathématique, v. 1, p. 158-162.

Aritmética Linear

Rodrigo Gondim[a], *Gabriel Guedes*[b], *Eudes Naziazeno*[c], *Brianne Lopes*[d]

[a] Universidade Federal Rural de Pernambuco , *Email:* `rodrigo.gondim.neves@gmail.com`

[b] Universidade Federal Rural de Pernambuco , *Email:* `g.a.guedes@gmail.com`

[c] Universidade Federal de Pernambuco, *Email:* `eudesnaziazeno@yahoo.com`

[d] Universidade Federal Rural de Pernambuco - Aluna Egressa,

A aritmética consiste no estudo dos números particularmente dos números inteiros. Estaremos interessados em questões aritméticas presentes em objetos geométricos lineares como retas, planos, polígonos etc. Assim podemos dizer que aritmética linear seria o estudo de pontos inteiros em ambientes lineares. Nossos objetos lineares são a representação geométrica das soluções de uma equação ou sistema de equações lineares. Supomos que temos equações lineares com coeficientes inteiros e buscamos soluções inteiras.

No primeiro capítulo trataremos de forma elementar a teoria de reticulados num espaço multi dimensional fazendo paralelo com a álgebra linear, de fato tal teoria nada mais é que álgebra linear com escalares inteiros. A determinação de base de um reticulado é um importante problema computacional.

No segundo capítulo trataremos dos sistemas de equações diofantinas que geometricamente são uma translação de um reticulado. Assim sendo, conhecida uma solução particular do sistema e uma base do reticulado encontramos todas as soluções inteiras do sistema. Sistemas de equações diofantinas são problemas indeterminados estudados há centenas de anos em diversas civilizações e sistematizados (do ponto de vista ocidental) por Diophantus, Euler e outros.

No terceiro capítulo tratamos o problema do troco de Frobênius que consiste em encontrar soluções positivas para equações diofantinas com coeficientes positivos. De forma lúdica o problema pode ser assim apresentado: *Qual a menor quantia que pode ser paga com notas de valores especificados e relativamente primos?* Para que o problema esteja bem posto mostraremos um resultado de Schur mostrando que os valores que não podem ser pagos são limitados. Trataremos o problema geometricamente no caso planar resolvendo-o completamente e esturemos o caso espacial do ponto de vista geométrico e computacional. O problema está completamente aberto em cinco variáveis ou mais.

O último capítulo será dedicado ao teorema de Pick que relaciona a área de um polígono no plano com vértices inteiros com o número de pontos inteiros em seu interior e sua fronteira. Mostraremos a equivalência entre o teorema de Pick e uma versão do teorema de Euler para polígonos com vértices inteiros. Trataremos ainda uma aplicação do teorema de Pick: *Quantos plantas podemos plantar em um terreno poligonal?*

A abordagem será elementar e geométrica dando ênfase a exemplos e algoritmos. Um conhecimento de Geometria Analítica, Álgebra Linear e Aritmética dos Inteiros será muito importante.

Referências

[1] Alfonsín, J.R. (2005) *The Diofantine Frobenius Problem.* Oxford University Press.

[2] van der Waerden, B.L. (1970) *Algebra, Volume 2.* Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1970.

[3] Stewart, I. N.; Tall, D. O. (2002) *Algebraic number theory and Fermat's last Theorem.* A K Peters, Natick MA, 3rd Edition.

[4] Garcia, A.; Lequain, I. (1996) *Elementos de Álgebra.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1996.

[5] Hefez, A. *Iniciação à Aritmética.* PIC-OBMEP, Rio de Janeiro.

[6] Lima, E.L. (2006) *Meu Professor de Matemátrica e outras Histórias* Coleção do Professor de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro.

[7] Lima, E.L. (2006) *Algebra Linear* Coleção Matemática Universitária, IMPA.

[8] Abdulrab, H.; Pécuchet, J.P. (1989) *Solving systems of linear diophantine equations and word equations.* Lecture Notes in Computer Science Volume 355, pp 529-532.

[9] Lazebnik, F (1996) *On systems of linear diophantine equations.* Mathematics Magazine, vol. 69, no. 4, 261?266.

[10] Barrière, L. ; Miralles, A. (2007) *The Frobenius problem: A Geometric Approach* Technical report UP-Commons

HEX – CONEXÕES EXTREMAS EM LADRILHOS HEXAGONAIS

Izabelly Marya Lucena da Silva

FAINTVISA - Faculdade Integrada de Vitória de Santo Antão

izabellymarya@ig.com.br

Resumo: O Hex é um jogo de profunda sutileza. Inicialmente inventado pelo matemático, físico e poeta dinamarquês Piet Hein em 1942. Depois em 1948 o matemático John Nash quando se preparava para o seu doutorado inventa o mesmo jogo sem saber e nem ter contato com a invenção de Piet Hein.

O jogo consiste em fazer conexões ao longo do tabuleiro feito de hexágonos, a fim de construir um caminho contínuo que ligue dois extremos do tabuleiro com peças do mesmo jogador.O jogo é jogado com dois oponentes e quem conseguir construir o caminho primeiro é o ganhador.

Este minicurso busca: estudar e explicar estratégias vencedoras para garantir a vitória no hex para o primeiro jogador e em certas situações para o segundo também, formas diferentes de se jogar o hex, regras para tornar o jogo justo, teoremas e demonstrações e também tabuleiros equivalentes com verificação da equivalência.

Palavras-chave: Conexões; ligação; tabuleiro; equivalência e hexágonos.

1. HISTÓRICO

Inventado por P*iet Hein*, matemático, físico e poeta dinamarquês, o jogo apareceu pela primeira vez no jornal diário "*Polytiken*" de 26 de Dezembro de 1942, com o nome de "Polígono" em plena Segunda Guerra Mundial. Nesta época, o jogo adquiriu grande popularidade na Dinamarca, sendo que eram vendidos impressos para se jogar Hex, com lápis (da mesma forma que se faz atualmente com batalha naval).

Jornais publicavam problemas sobre Hex, como se publica hoje problemas de xadrez. O próprio Piet teve uma vida interessante: durante a invasão alemã, iniciada em 1940, durante a 2ª Guerra, ele fez parte do movimento de resistência da Dinamarca. O jogo hex ocorreu a Piet quando cismava sobre o teorema das quatro cores da topologia (afirma que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa sem que haja dois países vizinhos com a mesma cor).

Em 1948, o matemático *John Nash*, enquanto preparava o seu doutoramento em Princeton, e sem ter conhecimento da invenção de *Piet Hein*, inventou de novo o jogo. Recorde-se que Jonh Nash veio a receber o prêmio Nobel de Economia pelos seus trabalhos sobre as melhores estratégias de sucesso (ver referências Fernandes).

Uma história conta que o jogo teria sido inventado, desenvolvido e jogado, no interior de um banheiro, cujo piso era formado de ladrilhos hexagonais. Com o tempo, o jogo ganhou algumas variantes, como aquele em que as "casas" não são hexagonais, mas triangulares ou retangulares. Contudo, foi Martin Gardner, nas páginas do *Scientific American*, que o popularizou nos anos 50. Hoje o Hex está a tornar-se cada vez mais popular, sendo muito estudado.

2. CONCEITOS DO HEX

O Hex é um jogo de conexão, seu tabuleiro tem formato semelhante ao de um losango e é formado por hexágonos interligados. O tabuleiro utilizado habitualmente tem 11 por 11 hexágonos, mas podem ser utilizados tabuleiros de menores ou maiores dimensões. Cada um dos jogadores possui dois lados opostos do tabuleiro. Cada jogador tem um determinado número de fichas, normalmente 60, sendo que um deles jogará com as azuis e outro com as vermelhas.

Determinam-se quem joga em primeiro lugar procedendo, por exemplo, ao lançamento de uma moeda ao ar. Depois os jogadores, alternadamente, vão colocando as suas fichas nos hexágonos livres do tabuleiro. Ganha aquele que primeiro conseguir formar um caminho de fichas próprias que una os seus dois lados opostos, isto é, um caminho vermelho que una as duas margens vermelhas ou um caminho azul que una as duas margens azuis.

Para contrariar a vantagem (pelo menos teórica) do primeiro jogador, há quem admita uma regra opcional para que o jogo seja justo para os 2º jogadores. Senão, o 1º jogador sempre teria vantagem, pois escolheria a peça do meio. Quando efetua o movimento de abertura, o segundo jogador pode optar por trocar a ficha do adversário por uma das suas em vez de ocupar uma das "casas" vazias. Assim, ao efetuar a abertura do jogo o primeiro jogador terá que considerar a hipótese da sua peça ser substituída por uma do adversário. Terá que avaliar se deve colocar a sua primeira peça na posição que considera ótima correndo o risco de vê-la substituída, ou se deve optar por colocar a sua primeira peça noutra posição menos vantajosa vendo o adversário ocupar a melhor posição, mas ficando com a sua peça no tabuleiro.

Neste jogo não há capturas, preenchendo-se seqüencialmente o tabuleiro com peças. O jogo nunca termina sem vencedores, pois só é possível bloquear o jogo do

adversário completando a própria corrente. Iremos analisar estratégias vencedoras baseadas na colocação das peças de forma a obter vantagem e garantir a vitoria no hex.

3. DEFINIÇÕES DO HEX

Adjacência — duas peças dizem-se adjacentes se os hexágonos que ocupam partilham uma aresta.

N-ésima vizinhança – é dada, neste caso, pelo n-ésimo hexágono que circunda a peça. (Figura 5.0).

Distância – a distância entre uma peça e outra (ou uma margem) é dada pela identificação da ordem da vizinhança em que está esta outra peça (ou margem) em relação a primeira

Grupo — um conjunto de peças adjacentes da mesma cor.

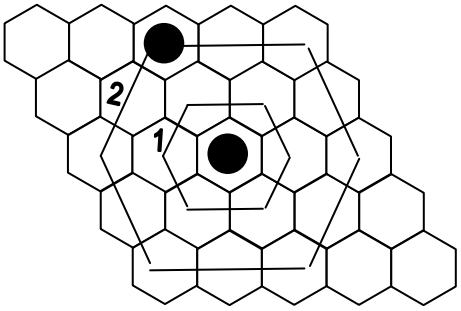


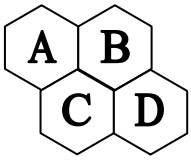
Figura 3. 0

4. ESTUDANDO A ESTRATÉGIA DO HEX

Uma das melhores sutilezas do hex é jogá-lo num tabuleiro com pequeno número de hexágonos. Convencionaremos as jogadas do primeiro jogador horizontalmente no sentido leste→oeste e oeste→leste e nossos tabuleiros serão do tipo m × n, m linhas e n colunas e com m = n. Estudaremos a estratégia partindo das jogadas do primeiro jogador. E sem utilizar a *Regra do Equilíbrio*.

5. ATIVIDADES SUGERIDAS

Atividade 1: Quais das casas hexagonais abaixo garantem a vitória no hex para o primeiro jogador, no tabuleiro 2 × 2 (ver Figura 5.1)?

Oeste 

Leste

Figura 5. 1

Atividade 2: Agora vamos fazer a mesma atividade para tabuleiro 3 ×3 (ver Figura 5.2):

Utilizando os mesmo raciocínios anteriores, vamos analisar agora tabuleiros maiores. O jogo a partir daqui começa a ficar mais elaborado e requer mais atenção para as jogadas.

Atividade 3: No tabuleiro 4 × 4 abaixo (ver Figura 5.3), inicialmente partindo da casa 1, com quantas jogadas garantirá a vitória no hex? E na casa 2? E na casa 3? E finalmente na casa 4? Tente imaginar as jogadas contra do adversário, pense que o mesmo também vai querer ganhar e jogará da melhor forma possível.

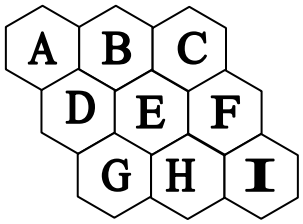


Figura 5. 2

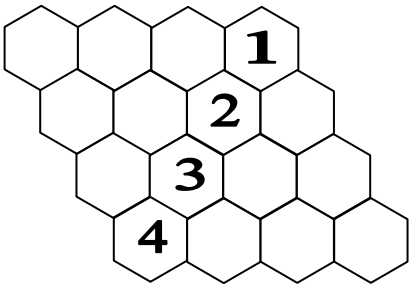
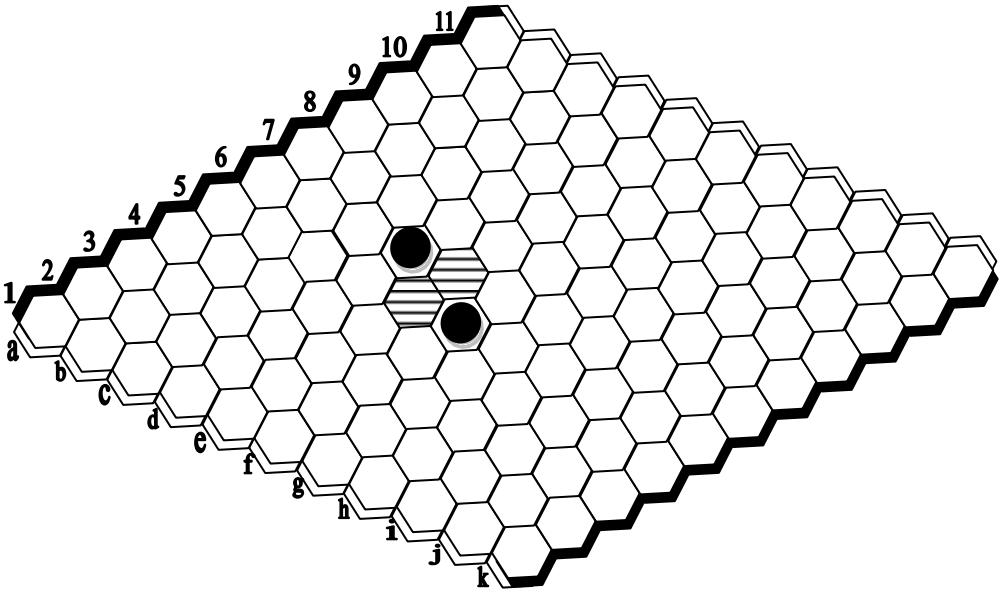


Figura 5. 3

Atividade 4: E se a jogada inicial não fosse em nenhuma das casa numeradas, com quantas jogadas seria possível garantir a vitoria.

6. PONTES

Uma das estratégias utilizadas numa partida de Hex é a formação de Pontes, pois para unir os dois lados opostos, realizar movimentos adjacentes não é a melhor opção. Cria-se uma ponte quando um par de peças (do mesmo jogador) ocupa casas não adjacentes, estando estas a duas unidades de distância. Perante esta situação, o jogador das



peças pretas tem sempre dois caminhos possíveis que ligam estas duas peças pretas, o que se torna muito vantajoso. Sempre que uma peça branca ocupe uma destas duas casas a tracejado, o jogador das peças pretas pode sempre realizar uma jogada na outra, estabelecendo dessa forma a ligação. É por esta razão que os jogadores tentam construir várias pontes ao longo do tabuleiro. Quanto mais próximo do centro, realizarem as suas primeiras jogadas, mais fáceis se torna a formação de pontes.

Figura 6.1

Podemos verificar a ocorrência dessas pontes nas atividades realizadas anteriormente. Por exemplo, no tabuleiro 2 × 2 (ver Figura 5.1), as únicas casas que garantem a vitória são aquelas que formam as pontes diretamente com as margens leste→oeste e oeste→leste, ou seja, as casas com as letras B e C.

Atividade 5: Analisando o tabuleiro de 5 × 5 (ver Figura 6.2) e utilizando a estratégia de pontes. Com quantas jogadas o primeiro jogador ganhará se ele partir da casa central do tabuleiro?

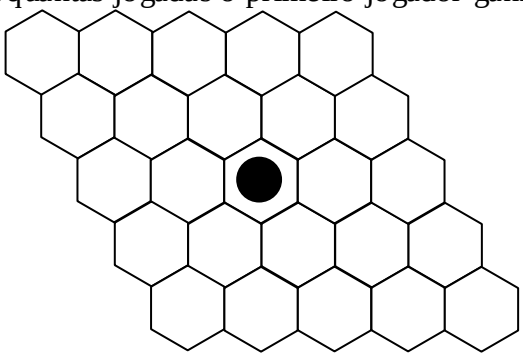


Figura 6.2

No HEX o número de jogadas é finito e haverá sempre um vencedor, nunca terminando o jogo empatado (David Gale). Também se pode demonstrar que, se jogasse de forma ótima, o primeiro jogador ganharia sempre. O problema está em descobrir a estratégia que o conduzirá à vitória.

O tabuleiro 7 × 7 é o maior tabuleiro para o qual se conhece a estratégia que dá a vitória ao primeiro jogador. Num tabuleiro maior o primeiro jogador sabe que, em teoria, deveria ganhar, mas não sabe como. No entanto existem algumas estratégias que aumentam a probabilidade de um jogador ganhar, que é a formação das pontes, explicado anteriormente.

Atividade 6 Teorema 1: Nenhum jogo do hex pode terminar em empate.

Atividade 7 Teorema 2: O jogo do hex pode ser sempre ganho pelo primeiro jogador. (Demonstração baseada na de John Nash).

Teorema 3: Os cantos agudos de um tabuleiro são aberturas perdedoras. (Demonstração por Beck):

Demonstração: Se o jogador das peças azuis colocar a primeira peça na posição a1, então o jogador das peças vermelhas responderá colocando uma peça vermelha em a2. Esta jogada remove quase por completo a peça azul do jogo.

Seja o conjunto de casas vazias adjacentes à peça azul {X}, logo para voltar a utilizar esta peça azul, colocada em a1, o jogador terá que usar a casa X, para estabelecer uma união. No exemplo anterior, a única casa adjacente à peça azul colocada em a1 é b2. No entanto, esta ligação não é favorável, na medida em que ligará as peças azuis ao seu próprio lado. Isto é, qualquer das peças neste lado do tabuleiro poderia ser a segunda jogada com o mesmo efeito de b1 para alcançar o objetivo; a1 se torna uma jogada dispensável. Esta situação pode proporcionar a vitória das peças vermelhas.

Podemos concluir, que esta estratégia é perdedora, porque um movimento de abertura num dos cantos agudos do tabuleiro pode conduzir o segundo jogador à vitória.

7. ESTRATÉGIA DO REFLEXO

A estratégia do reflexo para tabuleiros n × (n+1), é feita ao longo do eixo central, e dar ao segundo jogador a vitória certa. Qualquer que seja o jogo do adversário, o parceiro joga na outra casa que foi refletida. Vamos exemplificar no tabuleiro abaixo como essas

reflexões ocorrem, as dimensões utilizadas serão 6 × 7 (ver Figura 7.1). Imagine-se que associamos as casas de acordo com o diagrama.

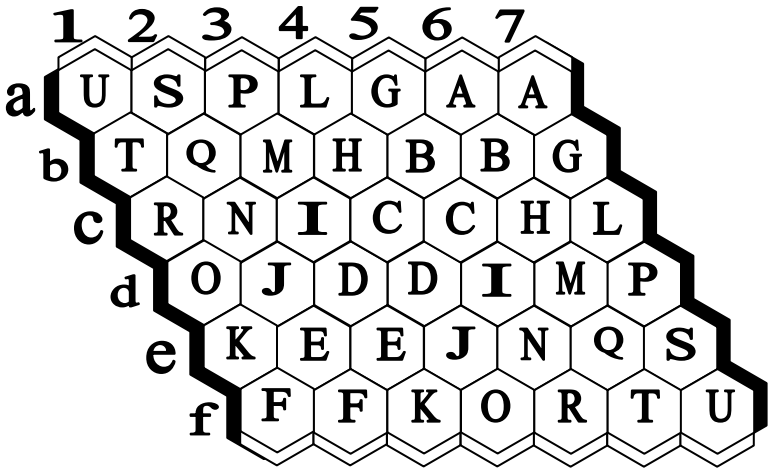


Figura 7.1

Como a distância dele aos dois lados do tabuleiro é menor, ele não poderá perder.

8. CAMPOS EQUIVALENTES PARA O JOGO DO HEX

Observe as figuras abaixo:

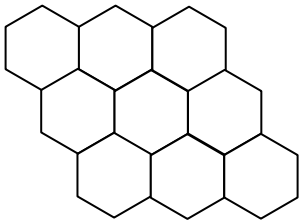


Figura 8.1a

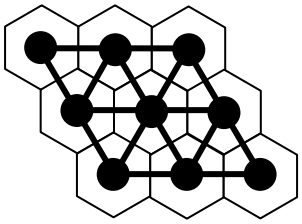


Figura 8.1b

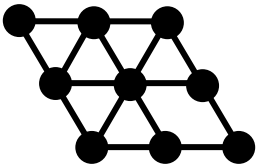


Figura 8.1c

Dado o tabuleiro de hex mais comum, ou seja, o de casas hexagonais (ver Figura 8.1a), podemos obter um tabuleiro equivalente a esse da seguinte maneira: Colocando em cada uma das casas hexagonais um vértice, representado por um círculo e a cada dois vértices pertencentes a casas hexagonais adjacentes ligarmos com uma aresta, (ver Figura 8.1b), obteremos o seguinte tabuleiro de triângulos da figura 8.1c que joga o mesmo jogo de hex.

Podemos fazer a seguinte comparação por caminhos. Isolando do tabuleiro de casas hexagonais, um dos hexágonos que tenha todas as adjacências, podemos perceber que jogando nessa casa, o caminho poderá ser feito de 6 formas diferentes visto que hexágono é uma figura plana, regular com 6 lados. Se jogarmos no tabuleiro de triângulos da Figura 8.1c, iremos jogar nos vértices dos triângulos e as ligações serão feitas por meio das arestas

do triângulo, fazendo a mesma observação no vértice central da Figura 8.1c, percebemos que 6 arestas partem dele para vértices adjacentes. Logo o caminho poderá ser feito de 6 formas diferentes também, assim como no tabuleiro de hexágonos da Figura 8.1a. Logo os dois tabuleiros são equivalentes.

O tabuleiro equivalente de Nash é dessa maneira, feito de triângulos e a jogabilidade é a mesma do tabuleiro de hexágonos como podemos analisar acima. Um jogador liga N-S, colocando peças da sua cor nas intersecções, o outro tenta a ligação E-O.

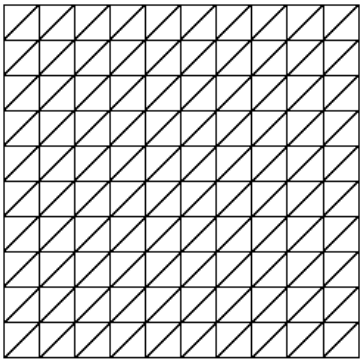


Figura 8. 2

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- EMÍLIA, Helena. O Jogo do Hex. 31 out 2007. Disponível em <http://wwwdescobertamat.blogspot.com/2007/10/jogo-do-hex.html>. Acesso em 20 mar 2010.
- FERNANDES, Jose Alberto Sousa. Hex Ludos – Regras. Disponível em < http://agpico.edu.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=131:hex-ludos-regras&catid=19:plano-da-matematica&Itemid=33>. Acesso em: 20 mar 2010.
- HEIN, Piet; NASH, John. Hex – Regras do jogo. O Janeirinho, p.8-9. Nov 2005. Disponível em < http://ludicum.org/events/04janh08_09-1.pdf>. Acesso em 15 fev 2010.
- SANTOS, Carlos Pereira dos. Análise de um problema de hex. Disponível em <http://ludicum.org/games/abstr/hex1/Hex.doc/view?searchterm=hex>. Acesso em 20 mar 2010.

Decodificação na Presença do Valor Semântico do Erro

Luciano Panek

UNIOESTE, Campus de Foz do Iguaçu, *Email:* `luciano.panek@unioeste.br`

1 Introdução

O problema central da *Teoria da Informação* consiste em determinar as taxas de informações para as quais existem esquemas de codificação confiáveis, ou seja, esquemas com probabilidades de erro de decodificação que assintóticamente tendem a zero. Tradicionalmente não são consideradas as diferenças entre os diferentes tipos de erros de decodificação. Em nosso minicurso abordaremos a questão da codificação na presença do valor semântico do erro de decodificação. Vejamos os detalhes.

Seja I um *conjunto de informações* contendo M elementos. Um *canal de comunicação* $(X, P(Y|X), Y)$ consiste de uma *alfabeto de entrada* X, um *alfabeto de saída* Y e um conjunto de *probabilidades condicionais* $p(y|x)$ com $y \in Y$ e $x \in X$, onde $p(y|x)$ denota a probabilidade de recebermos o símbolo y dado que o símbolo x foi transmitido. Para transmitirmos as informações de I pelo canal $(X, P(Y|X), Y)$ associamos cada informação $i \in I$ a uma única *palavra-código*

$$c(i) = (c_1(i), c_2(i), \ldots, c_N(i))$$

de X^N, o conjunto de todas as N-uplas com entradas em X, exigindo que $c(i) \neq c(j)$ se $i \neq j$. O conjunto C de todas as palavras código $c(i)$ com $i \in I$ é chamado de (N, M) *código de bloco.* A aplicação injetora

$$f : I \to C$$

dada por $f(i) = c(i)$ é o chamado *codificador de canal.* A *taxa de informação* relativa ao código C é o número

$$R = \frac{\log_2 M}{N}.$$

Um *decodificador de canal* para o código C é uma aplicação sobrejetora

$$a : Y^N \to C$$

que gera uma estimativa $a(y)$ em C para cada y de Y^N. Um *erro de decodificação* ocorre se $a(y)$ não corresponde a palavra-código transmitida. Não considerando as diferenças entre os possíveis erros de decodificação, a medida adotada para avaliar o desempenho da tripla (C, f, a) é a probabilidade de erro de decodificação

$$P_e(C, f, a) = \sum_{c \in C} \left(1 - \sum_{y \in a^{-1}(c)} p(y|c) \right) P(c)$$

onde a diferença

$$1 - \sum_{y \in a^{-1}(c)} p(y|c)$$

é a probabilidade do decodificador entregar para o destino uma plavra-código distinta da palavra-código c transmitida e $P(c)$ a frequência em que c é transmitida pelo canal. Note que $P_e(C, f, a)$ não depende do codificador de canal. Desta forma podemos escrever $P_e(C, f, a) = P_e(C, a)$.

Uma taxa de informação R é dita *confiável* para um determinado canal de comunicação se para todo $\delta > 0$ existe um par (C, a), de código e decodificador, com taxa de informação igual a R tal que $P_e(C) < \delta$. A máxima taxa de informação confiável para um determinado canal de comunicação é chamada de *capacidade do canal*. Assim, podemos formular o problema central da Teoria da Informação pondo: *dado um canal, determinar a sua capacidade.*

A resposta do problema central para os canais discretos *sem memória*, ou seja,

$$P(y_1 y_2 \ldots y_N | x_1 x_2 \ldots x_N) = P(y_1 | x_1) \cdot P(y_2 | x_2) \cdot \ldots \cdot P(y_N | x_N)$$

para todo $y_1, y_2, \ldots, y_N \in Y$ e $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$, foi dada por Claude E. Shannon em 1948 em seu trabalho pioneiro "*A mathematical theory of communication*" (ver [4]).

Neste minicurso abordaremos o problema mais geral da construção de esquemas de codificação considerando agora as diferenças entre os tipos de erros de decodificação. Para nós a natureza da informação será relevante[1], pois atribuiremos valores para os diferentes tipos de erros de decodificação de acordo com o significado das mensagens. Como já é de se esperar, os melhores esquemas de codificação relativos a probabilidade de erros de decodificação (aqueles esquemas que minimizam a probabilidade de erro) não são necessariamente os melhores esquemas de codificação quando consideramos as diferenças entre os erros de decodificação.

2 Codificação na Presença do Valor Semântico do Erro

Considere a imagem "*Hello World*" dada na Figura 1 abaixo:

Figura 1: Imagem original *Hello World*.

Simulando a transmissão desta imagem por um canal binário simétrico sem memória (a ser definido na próxima seção) para diferentes valores de probabilidade de erro p ($p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$) fica claro como devemos atribuír os valores entre os diferentes tipos de erros: no caso da imagem acima, estamos utilizando uma fonte de informações

[1] "*The semantic aspects of communication are irrelevant to the engeneering problem. The significant is that the actual message is one selected from a set of possible messages.*" Claude E. Shannon, 1948 (ver [4]).

composta por 16 tons de cinza; daí os valores dos erros devem ser atribuídos de acordo com as diferenças entre os tons de cinza.

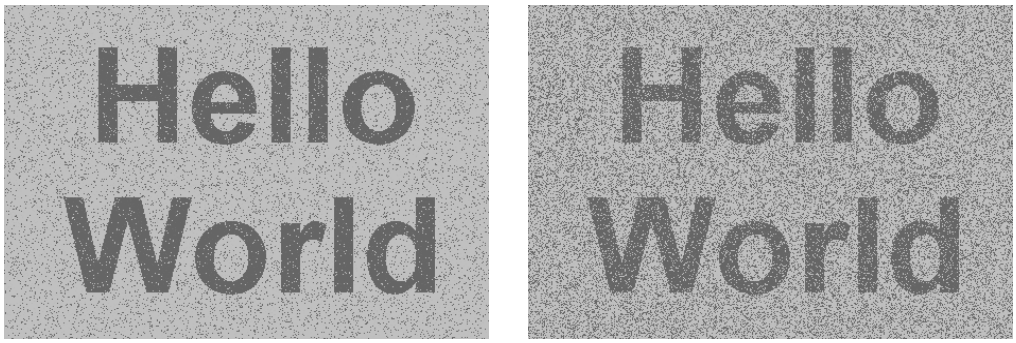


Figura 2: Simulação com $p = 0.1$ e $p = 0.2$ respectivamente.

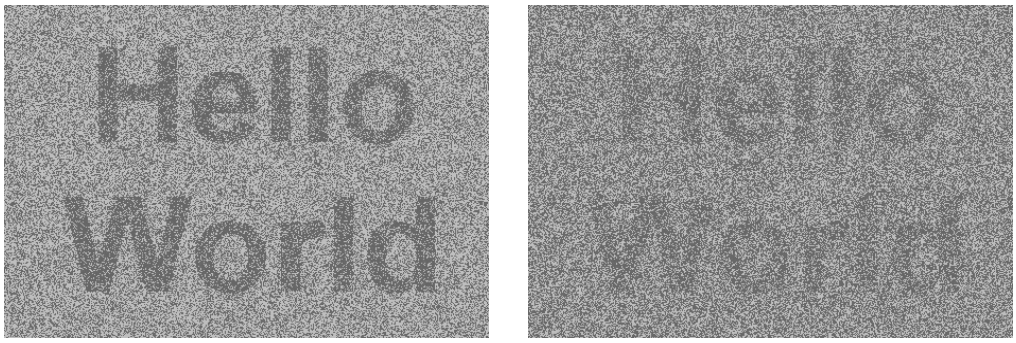


Figura 3: Simulação com $p = 0.3$ e $p = 0.4$ respectivamente.

Em geral:

Definição 2.1 *Seja I um conjunto de informações. Uma* ***função de valor*** *sobre $I \times I$ é uma aplicação ν que associa a cada par (i, i') de $I \times I$ um número real não negativo, ou seja, uma função*

$$\nu : I \times I \to \mathbb{R}_+.$$

Se $f : I \to C$ é um codificador de canal, então a função

$$\nu_f : C \times C \to \mathbb{R}_+$$

dada por $\nu_f(c, c') := \nu\left(f^{-1}(c), f^{-1}(c')\right)$ é a chamada ***função de valor associada a*** *f.*

A medida adotada agora para avaliar a eficiência de um esquema de codificação na presença do valor da semântica dos erros de decodificação é a perda esperada total:

Definição 2.2 *Fixe um canal de comunicação $(X, P(Y|X), Y)$. Seja I um conjunto de informações e (C, f, a, ν) uma quádrupla tal que C é um (N, M) código de bloco, $f : I \to C$ é um codificador de canal, $a : Y^N \to C$*

é um decodificador de canal e $\nu : I \times I \to \mathbb{R}_+$ *é uma função de valor. Seja* $\{P(c) : c \in C\}$ *a distribuição de probabilidades a priori de* C*. A* ***perda esperada total*** $\mathbb{E}(C, f, a, \nu)$ *de* C *relativa a tripla* (f, a, ν) *é definida como sendo o número*

$$\mathbb{E}(C, f, a, \nu) = \sum_{y \in X^N} \mathbb{E}_y(f, a, \nu) P(y)$$

onde

$$\mathbb{E}_y(f, a, \nu) = \sum_{c \in C} \nu_f(a(y), c) P(c|y),$$

com $P(y) = \frac{P(y|c)P(c)}{P(c|y)}$*, é a* ***perda esperada em*** y *e* ν_f *é a função de valor associada a* f*.*

No problema clássico a função de valor $\nu : I \times I \to \mathbb{R}_+$ considerada é

$$\nu(i, i') = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i = i' \\ 1 & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}.$$

De fato, para esta função de valor temos que

$$P_e(C, a) = \mathbb{E}(C, f, a, \nu),$$

e neste caso a perda esperada total não depende do codificador de canal $f : I \to C$.

Na prática o codificador de canal pode sim influenciar na percepção da mensagem, conforme mostram as imagens na Figura 2 abaixo:

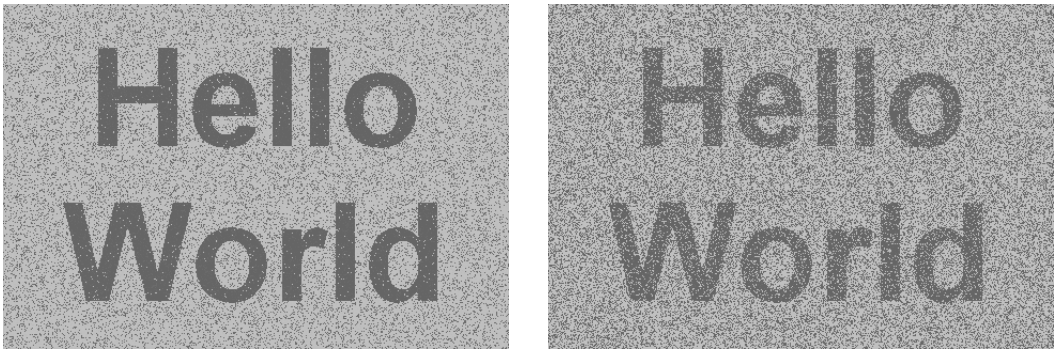


Figura 4: Simulação de uma transmissão com dois codificadores.

3 Canais q-Ários Simétricos e Funções de Valor Invariantes por Translação

Em nosso minicurso vamos considerar duas restrições significativas: vamos tratar somente dos canais q-ários simétricos e das funções de valor invariantes por translação. A primeira restrição nos coloca no cenário tradicional da Teoria da Informação (é o modelo básico), enquanto que a segunda suaviza (ou simplifica) o cálculo da perda espera total.

Definição 3.1 *Seja $\mathbb{F}_q$ um corpo finito contendo q elementos. Um canal é dito* ***q-ário simétrico sobre*** *$\mathbb{F}_q$ com* ***probabilidade de erro*** *p, $0 < p < \frac{1}{2}$, se $P(y|x)$ satisfaz a condição*

$$P(y|x) = \begin{cases} 1-p & se \quad x = y \\ \frac{p}{q-1} & se \quad x \neq y \end{cases}$$

para todo $x, y \in \mathbb{F}_q$.

É conhecido na literatura especializada que se a distribuição de probabilidades a priori de C é uniforme, então os decodificadores que minimizam a probabilidade de erro de decodificação $P_e(C, a)$ são os decodificadores por vizinho mais próximo relativos a distância de Hamming d_H.

Definição 3.2 *Seja $I = \mathbb{F}_q^k$. Uma função de valor $\nu : \mathbb{F}_q^k \times \mathbb{F}_q^k \to \mathbb{R}_+$ é dita* ***invariante por translação*** *se*

$$\nu(u + w, v + w) = \nu(u, v)$$

para todo $w \in I$.

No caso das funções de valor invariantes por translação, temos a seguinte expressão para a perda esperada total relativa a um canal q-ário simétrico (ver [3]):

Teorema 3.1 *Seja C um (N, M) código linear sobre um canal q-ário simétrico, ou seja, C é um subespaço vetorial de $\mathbb{F}_q^N$. Então*

$$\mathbb{E}(C, f, a, \nu) = \sum_{\tau \in C} G_a(\tau) v_f(\tau)$$

com

$$G_a(\tau) = \frac{(1-p)^N}{M} \sum_{y \in \mathbb{F}_q^N} s^{d_H(y, a(y) - \tau)}$$

onde $s := \frac{p}{(1-p)(q-1)}$.

Ao contrário do que acontece com a probabilidade de erro de decodificação $P_e(C, a)$, temos que $\mathbb{E}(C, f, a, \nu)$ pode depender do codificador de canal $f : I \to C$ se ν não é a função de valor $(0, 1)$. Isto é justificado pelo seguinte resultado (ver [3]):

Teorema 3.2 *Seja $C = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_M\}$ um (N, M) código linear sobre $\mathbb{F}_q$. Assuma que*

$$G_a(\tau_1) \geq G_a(\tau_2) \geq \ldots \geq G_a(\tau_M).$$

Temos que o codificador de canal $f : I \to C$ minimiza a perda esperada total para uma dada função de valor ν invariante por translação se, e somente se,

$$\nu_f(\tau_1) \leq \nu_f(\tau_2) \leq \ldots \leq \nu_f(\tau_M).$$

4 Código Binário de Hamming $(7, 16)$

Passadas as duas primeiras etapas do minicurso (descrição do problema da transmissão confiável quando assumimos o valor semântico do erro de decodificação e a caracterização da perda esperada total sobre um canal q-ário simétrico), passamos a descrever a terceira e última etapa do minicurso: vamos considerar 16 tons de cinza pré-estabelecidos como sendo o espaço de informações, codificar estes tons como sendo o código binário de Hamming $(7, 16)$ e exibir um decodificador de canal para este código que gere melhores resuldados quando comparados com o tradicional decodificador por vizinho mais próximo; também vamos explorar os codificadores de canais relativos a cada um destes decodificadores.

O decodificador a ser considerado, que baterá o decodificador por vizinho mais próximo, será induzido por uma segunda métrica, distinta da métrica de Hamming, pertencente a família das métricas poset (ver [1]). Uma breve introdução sobre as métricas poset será apresentada, o suficiente para um bom entendimento das idéias. Uma revisão mais detalhada do assunto poderá ser encontrada em [2].

Abaixo exibimos simulações de transmição da imagem "Hello World" por um canal binário simétrico utilizando um $(7, 16)$ código binário de Hamming: as imagens da esquerda foram decodificadas com o decodificador por vizinho mais próximo e as imagens da direita foram decodificadas com o decodificador induzido pela métrica poset.

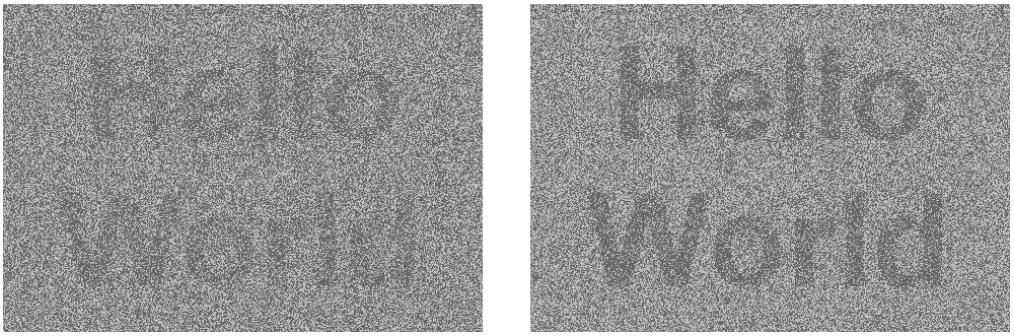
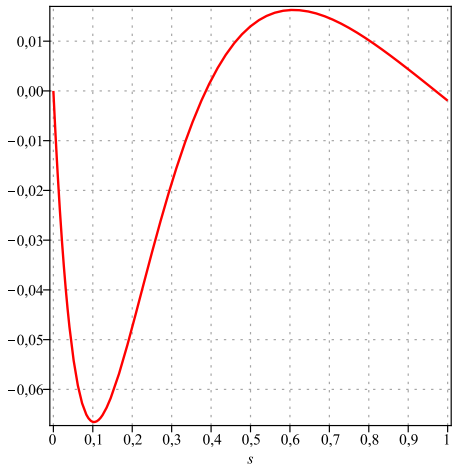


Figura 5: Simulação de uma transmissão com probabilidade de erro $p = 0.4$: à esquerda usando o decodificador por vizinho mais próximo; à direita usando o decodificador induzido pela métrica poset

Na figura abaixo ilustramos a diferença entre a perda esperada total relativa ao decodificador por vizinho mais próximo e a perda esperada total relativa ao decodificador induzido pela métrica poset. Temos assim uma estimativa das probabilidades de erros p onde o decodificador induzido pela métrica poset passa a ganhar do decodificador por vizinho mais próximo (o momento onde a perda esperada total relativa ao decodificador induzido pela métrica poset passa a ser menor do que a perda esperada total relativa ao decodificador por vizinho mais próximo).



Referências

[1] Brualdi, R., Graves, J. S. and Lawrence, M. - *Codes with a poset metric* - Discrete Mathematics 147 (1995) 57-72.

[2] Panek, L., Firer, M. - *Códigos e Métricas* - IV Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Maringá-UEM (2008).

[3] Panek, L. - *Codificação na Presença do Valor Semântico da Informação* - Tese de Doutorado, Maringá-UEM (2012).

[4] Shannon, C. E. - *A mathematical theory of communication* - The Bell System Technical Journal 27 (1948), 379-423.

Média aritmética: uma abordagem abrangente é necessária?

Paulo Jorge Magalhães Teixeira

UFF – Universidade Federal Fluminense, Colégio Pedro II, *Email:* [pjuff@yahoo.com.br]

Este Minicurso tem como objetivo principal o de fazer uma ampla abordagem do conceito de média aritmética através de uma série de atividades que vão procurar ampliar o que habitualmente os livros didáticos abordam. Muito embora o algoritmo de resolução seja bastante simples até para o não amante da matemática, muito deles não sabem utilizar-se do valor obtido pela média para uma detalhada análise dos dados que deram lugar ao seu valor. Surge então a questão: Para que serve o cálculo da média? O valor da média sempre coincide com algum valor da amostra? Em que situações esses valores são iguais? Onde usar o seu valor? Em que situações o seu valor é necessário para analisar os dados de uma amostra? Estas e outras perguntas serão respondidas ao longo das situações propostas aos participantes. A proposta deste Minicurso partiu depois que o autor, ao trabalhar com seus alunos em uma sala de aula da 3ª Série do Ensino Médio de um Colégio Federal percebeu que o livro didático indicado pelo colégio não continha atividades que contemplassem parte das questões que serão abordadas e, além do mais, poucos eram os exercícios que focavam em questões qualitativas relacionadas com o conceito de média aritmética, tais como as influências que ela sofre quando se altera o valor ou valores da amostra considerada ou então quando se retira ou acrescenta novos dados. Para tal, em relação à prática metodológica que pontuou a sequência didática das situações propostas, nos valemos do trabalho de pesquisa de Batanero (2000) sobre o significado e a compreensão das medidas de tendência central, da exploração desse conceito em livros didáticos segundo Anjos (2008) e, para analisar a introdução do conceito, considerando os invariantes, significados e representações, sob a luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaut (1991).

INTRODUÇÃO

Em pesquisa realizada por Strauss & Bichler (1988) eles conceituaram algumas propriedades que consideram importantes para a construção do conceito de média, quais sejam:

A média está localizada entre os valores extremos; A soma dos desvios a partir da média é igual a zero; A média é influenciada por cada um e por todos os valores; A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir do qual foi calculada; A média pode ser um valor que pode não corresponder a um dado dentro do conjunto de dados reais da amostra; O cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos; A média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial).

Já Batanero (2000) enumera quatro significados em que o conceito de média aritmética emerge, de maneira progressiva:

Estimação de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição – cálculo da melhor estimativa de um valor desconhecido; Necessidade de obter um valor justo

equitattivo para uma distribuição uniforme; Servir de elemento representativo de um conjunto de dados, cuja distribuição é simétrica; Valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população.

Por outro lado, Anjos & Gitirana (2008), ao analisarem os livros didáticos do PNLD 2008 perceberam que, dentre as poucas propriedades do conceito de média aritmética, um número reduzido delas é trabalhada de modo satisfatório nesses exemplares. Além do mais, afirmam os autores, mesma aquelas propriedades que são trabalhadas em maior número nesses livros didáticos a ênfase dada a elas é insuficiente para que os alunos se apropriem de conhecimentos capazes de compreender a média aritmética enquanto um conceito estatístico.

Ainda segundo Strauss & Bichler (1988), as pesquisas feitas por eles mostrou que os alunos têm um domínio satisfatório quando se trata de utilizar o algoritmo da média porém revelam as dificuldades de compreensão em relação aos diferentes aspectos que emergem do conceito de média.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Medidas centrais são valores que resumem um conjunto de dados a um único valor que, de alguma forma, seja representativo do conjunto. As mais importantes medidas de tendência central são: a média aritmética, a mediana e moda. Também é usada a média aritmética para dados agrupados, a média aritmética ponderada, a média geométrica, a média harmônica. Se os dados provêm de uma amostra, a média, a mediana e as demais medidas de tendência central são dados estatísticos e, se os dados provêm da população, eles são parâmetros.

MÉDIA ARITMÉTICA

A média (valor esperado, ou valor médio) de um conjunto de n observações é, simplesmente, a soma dos valores das observações dividida pelo número de observações.

Se x1, x2, ..., xn denota uma amostra de n observações, então a média da amostra denota-se por $\bar{x}$ (“x-barra”) e é calculado como:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_j}{n} = \frac{x + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_{n1}}{n}$$

Se todos os dados da população são considerados então a notação é trocada pela letra grega μ.

A MÉDIA ARITMÉTICA É REPRESENTATIVA?

O valor médio nem sempre é representativo. Pense: As notas em Português de Raul são: 7, 98, 25, 19 e 26. Calcule o valor médio das notas de Raul. O que representa o valor médio das notas de Raul?

Combinando valores médios: O valor médio das notas em Português de 3 (três) estudantes é 54, e o valor médio de outros 4 (quatro) estudantes (nenhum deles é do grupo dos estudantes anteriores) é 76.

Qual o valor médio das 7 notas?

E se o valor médio das notas de 3 estudantes é 76 e de outros 4 estudantes é 54, qual o valor médio das 7 notas? Compare os resultados.

O valor médio está sempre no centro (meio) da amostra? Muito cuidado!

Suponha que tenhamos os valores de uma amostra com n = 10.

Pode a média ser maior que o maior dos valores ou menor que o menor valor da amostra?

Pode a média, $\bar{x}$, ser igual ao menor valor?

Pode a média, $\bar{x}$, ser igual ao maior valor?

Pode a média, $\bar{x}$, ser igual à média entre o menor e o maior valor da amostra (se eles são distintos)?

Pode a média, $\bar{x}$, ser igual ao segundo valor quando se consideram os valores em ordem crescente (onde nem todos os valores são iguais)?

Pode a média, $\bar{x}$, não ser igual a nenhum valor da amostra?

Exemplo: Média do número de filhos por domicílio

Em uma amostra aleatória simples de 10 domicílios, obtiveram-se os seguintes dados correspondentes ao número de filhos em cada domicílio:

2, 3, 0, 2, 1, 0, 3, 0, 1, 4.

O valor médio de filhos por domicílio é 1,6. Como é impossível ter 1,6 filhos, consideramos esse valor como média (não o arredondamos para um número inteiro!).

O que ocorre se na lista original ao invés de se escrever 4, tivéssemos escrito 40? O que ocorre com a média devido a esse erro?

$$\bar{x} = \frac{2+3+0+2+1+0+3+0+1+40}{10} = \frac{52}{10} = 5{,}2.$$

Note que 9 dos 10 valores são menores que a média. A média é sensível a valores extremos. Quase todo o gráfico detecta este valor extremo.

MODA

Define-se moda de um conjunto de observações de uma amostra como sendo o valor que surge com mais frequência se os dados são discretos, ou, classe modal ao intervalo de classe com maior frequência, se os dados são contínuos.

Assim, da representação gráfica dos dados, obtém-se imediatamente o valor que representa a moda ou a classe modal.

MEDIANA

A mediana é uma medida de localização do centro da distribuição dos dados, definida do seguinte modo:

Ordenados os elementos da amostra, do menor para o maior, a mediana de n observações é o valor (pertencente ou não à amostra) que a divide ao meio, isto é, 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana.

Para a sua determinação utiliza-se a seguinte regra, depois que a amostra de n elementos é ordenada:

* Se n é ímpar, a mediana é o elemento médio.

* Se n é par, a mediana é a semi-soma dos dois elementos médios (centrais).

Observações: A mediana é resistente, isto é, não sofre alterações com as modificações efetuadas com as trocas nos valores extremos da amostra. A moda é uma medida especialmente útil para reduzir a informação de um conjunto de dados qualitativos apresentados sob a forma de nomes ou categorias, para os quais não se pode calcular a média e por vezes a mediana.

Faça a representação de distribuições em que: a média é igual à mediana, que é igual à moda;distribuição bimodal e a média é igual à mediana; a moda é menor que a mediana, que é menor que a média e, finalmente, a média é menor que a mediana que é menor que a moda. Agora pense: Se você calcula a média, a mediana e a moda, qual delas sempre é um dos valores observados na amostra?

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA MÉDIA E DA MEDIANA

1. Quando a distribuição é simétrica, a média e a mediana coincidem.
2. A mediana não é tão sensível quanto a média às observações que são muito maiores ou muito menores do que as restantes, os chamados outliers. Por outro lado, a média reflete o valor de todas as observações.

3. Como medida de localização, a mediana é mais robusta do que a média, pois não é tão sensível aos dados.

Como visto, a média, ao contrário da mediana é uma medida muito influenciada por valores "muito grandes" ou "muito pequenos" mesmo que estes valores surjam em pequena quantidade na amostra. Estes valores são os responsáveis pela errônea utilização da média em muitas situações em que teria mais significado utilizar a mediana.

4. Se a distribuição for aproximadamente simétrica, a média aproxima-se da mediana.

5. Se a distribuição for enviesada para a direita (alguns valores grandes como outliers), a média tende a ser maior que a mediana.

6. Se a distribuição for enviesada para a esquerda (alguns valores pequenos como outliers), a média tende a ser inferior à mediana.

VARIABILIDADE EM UM CONJUNTO DE DADOS

Anteriormente vimos algumas medidas de localização do centro de uma distribuição de dados. Veremos agora como medir a variabilidade presente num conjunto de dados através das seguintes medidas: Medidas de dispersão, Variância e Desvio-padrão.

Quando se estuda a variabilidade de um conjunto de dados, as medidas mais importantes são a amplitude, o desvio padrão e variância.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Um aspecto importante no estudo descritivo de um conjunto de dados é o da determinação da variabilidade ou dispersão desses dados relativamente à medida de localização do centro da amostra.

Supondo ser a média a medida de localização mais importante, será relativamente a ela que se define a principal medida de dispersão: a variância, que será definida a seguir.

VARIÂNCIA

Define-se a variância como sendo a medida que se obtém somando os quadrados dos desvios das observações da amostra, relativamente à sua média, e dividindo pelo número de observações da amostra. Assim, se as n observações de uma variável X são x1, x2, ..., xn, a variância é

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$, onde $$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$ é a média aritmética das observações.

Observação: A variância de uma amostra é mais comumente definida como acima, mas substituindo o denominador por n-1 (isto é feito para que ela seja um estimador não enviesado da verdadeira variância da população). Para amostras grandes, ambas as expressões dão praticamente o mesmo resultado.

DESVIO-PADRÃO

Uma vez que a variância envolve a soma de quadrados, a unidade em que se exprime não é a mesma que a dos dados. Assim, para obter uma medida da variabilidade ou dispersão com as mesmas unidades que os dados, tomamos a raiz quadrada da variância e obtemos o desvio padrão. Assim, o desvio padrão de uma variável X cujos valores são x1, x2, ..., xn, é dada por

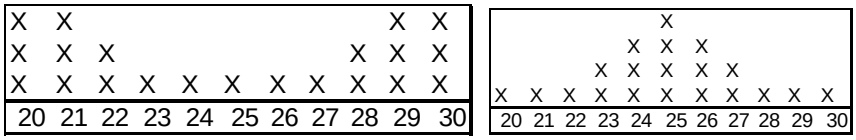
$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

O desvio padrão é uma medida que só pode assumir valores não negativos e quanto maior for seu valor maior será a dispersão dos dados da amostra.

AMPLITUDE

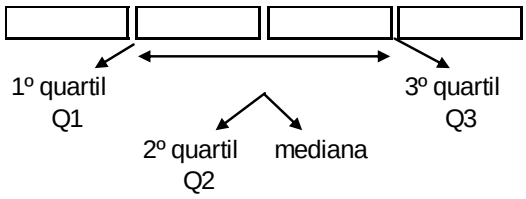
A amplitude é a mais sensível medida de variabilidade e é igual à diferença entre o máximo e o mínimo valor entre as classes. Muitas vezes a amplitude pode apresentar uma falsa idéia da variação, por exemplo:

Duas distribuições que tem a mesma amplitude, porém com diferentes variações: a primeira distribuição tem seus valores afastados do centro e a segunda distribuição próximos do centro, como visto no desenho abaixo.



AMPLITUDE INTER-QUARTIL

A amplitude inter-quartil mede a variabilidade dos 50% centrais das classes, como representado no desenho abaixo:

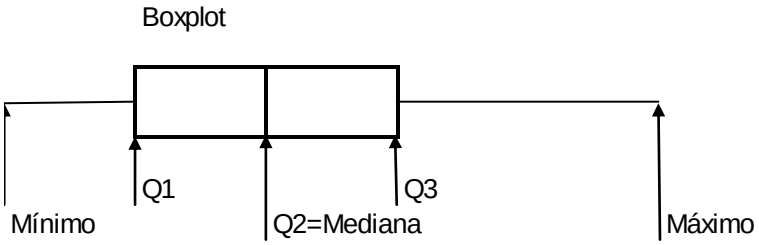


Os 3(três) valores que dividem os dados em quatro partes com igual proporção chamam-se "quartis", e estão representados por Q1, Q2 e Q3. A diferença entre o terceiro quartil (Q3) e o primeiro quartil (Q1), chama-se "Amplitude Inter-quartil", e é indicada por AIQ = Q3 – Q1.

Agora vamos ver como encontrar os quartis. Inicialmente calcula-se a mediana de todas as observações da amostra. A Mediana é igual ao quartil 2. Mediana = Q2.

O primeiro quartil (Q1) é calculado como a mediana entre todas as observações menores que o quartil Q2 e o terceiro quartil (Q3) é calculado como a mediana entre todas as observações maiores que o quartil Q2. Os quartis são também conhecidos como 25º (25-ésimo), 50º (50-ésimo) e 75º (75-ésimo) "percentins".

Em geral, o pº (p-ésimo) percentil é o valor tal que p% das observações são iguais ou menores que esse valor e (100-p)% das observações são iguais ou maiores que esse valor. Os 5 (cinco) números importantes podem ser resumidos no desenho conhecido como "Boxplot" e são: Valor Mínimo da amostra, Q1, Mediana, Q3 e Valor Máximo da amostra, como mostrado na figura abaixo:



O “Boxplot” básico se constrói da seguinte maneira:

* Os dois finais do box são indicados pelos valores do Q1 e Q3;

* A linha central do box é indicado pelo valor do Q2, que é igual ao valor da mediana;

* as linhas que saem dos lados do box chegam até os valores máximo e mínimo da amostra.

Os “Boxplot” colocados um ao lado de outro de duas ou mais distribuições é muito útil para compara-las. Como proceder para identificar os outliers?

As observações que tem seus valores fora dos dois valores: Q1 – 1,5x(AIQ) e Q3+1,5x(AIQ) são ditos outliers. O “Boxplot” básico modifica-se se indicando, individualmente, todos os outliers e indicando-se as linhas que saem do “box” somente até os valores que não são outliers.

PROPOSTA DO MINICURSO COM RESPEITO À PRÁTICA METODOLÓGICA NOS FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA

Segundo Guy Brousseau (1986), ao longo das atividades didáticas às quais o estudante é confrontado é desejável que “produza, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos e teorias”. Diferentes situações-problema de Estatística se prestam bem ao que Brousseau sugere.

Segundo Lerman (1996), “o aluno é um sujeito ativo na construção de seu conhecimento e na estruturação de sua inteligência”. Ele aprende a partir de suas ações e reflexões, em interações com o outro. Por outro lado, a utilização de diversas atividades envolvendo (ou não) o uso de material concreto, além de jogos, no ensino da Matemática, permite ao aluno se desenvolver enquanto sujeito protagonista de seu aprendizado.

Desse modo, a estimulação gradual do uso de conceitos de estatística, num ambiente lúdico, em diferentes situações problemas, promove o pensar, de forma criativa e crítica, desenvolvendo habilidades e competências cognitivas e sociais, as quais passam a fazer parte de sua estrutura mental, podendo ser generalizadas para outras situações.

Acredito que a Estatística seja importante ferramenta para que o aluno, inserido no mundo das informações, das novas tecnologias e do dia-a-dia das atividades rotineiras, adquira conhecimentos e desenvolva habilidades que o capacitem para resolver problemas reais ao seu alcance e compreenda outras situações.

A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Por conta disso, a pesquisa tem como sustentação a Teoria dos Campos Conceituais criada por Vergnaut (1991), a qual leva em conta uma série de fatores que influenciam e interferem o ensino e a aprendizagem quando se procura identificar, formar e desenvolver determinado conceito, a partir da tríade:significados, invariantes e representações.

O trabalho com situações é importante para que o conhecimento conceitual possa surgir a partir da exploração de situações desencadeadas a partir da adequação delas em

conjunto com a manipulação de material concreto (se possível) ou com o auxílio de softwares.

Segundo Vergnaut (1991), o estudo para o desenvolvimento de um determinado campo conceitual exige do pesquisador a visão segundo a qual um conceito é formado pela tríade (S, I, R), onde: S é um conjunto de diferentes situações que permitem ao conceito ser significativo, para ser explorado; I é um conjunto de invariantes (objetos, relações entre si e propriedades relacionando-os entre si) que podem ser identificados e usados pelo sujeito de pesquisa de modo a poder analisar e compreender essas situações e R é um conjunto de diferentes representações que podem ser usadas para fazer realçar e representar os invariantes da situação e, deste modo, poder representar as situações e os mecanismos necessários para utilizar esses invariantes.

Um dos grandes "nós" que afligem os educadores matemáticos é compreender que a aquisição e a compreensão de um dado conceito pelos alunos não se dá, unicamente, com a apresentação de um tipo de situação (não emerge daí, somente) e, por outro lado, que uma dada situação pode vir a envolver mais do que um só conceito, por mais simples que possa ser aos nossos olhos.

Portanto, conceitos matemáticos têm significado para o aluno quando são percebidos por ele a partir de uma variedade de situações nas quais pode ser sentida sua importância. Por outro lado, uma dada situação pode apresentar diferentes conceitos envolvidos, ou seja, ela necessita de mais de um conceito para ser analisada e compreendida.

Assim, um único conceito, fechado em si, e uma única situação-problema não são suficientes para dar conta da aquisição de um dado conhecimento, de forma plena e consistente, e capaz de proporcionar segurança no seu uso em diferentes contextos.

A ESTATÍSTICA COMO CONTEÚDO IMPORTANTE NA FORMAÇÃO DO CIDADÃO. RESULTADOS ESPERADOS NESTE MINICURSO:

Esperamos que as situações sugeridas para trabalhar ao longo do minicurso sejam suficientes para estabelecer as relações do conceito de média aritmética enquanto um conceito de estatística e não somente um procedimento de cálculo cujo algoritmo esgota o seu resultado em si, não mostrando a importância de seu valor e em que situações ele deve ser usado para responder a diferentes questões que se colocam quando uma amostra de dados é avaliada.

Por outro lado, considerando que as situações propostas estão consoantes conforme prescrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais, conforme Brasil (1997) e Brasil (1998), estamos ofertando situações que favorecem a aprendizagem deste conceito.

Entendemos que, ao longo da Educação Básica, o ensino da Matemática deve levar o aluno a construir, paulatinamente, o conceito de média aritmética, uma vez que ele é rico em proporcionar opções de tomada de decisões que requerem argumentos consistentes para provar a veracidade ou falsidade deles.

Além do mais, os conceitos de estatística são bastante atraentes para serem trabalhados em sala de aula, seja através de desafios ou no desenvolvimento de trabalhos em grupos, fornecendo uma enorme variedade de situações presentes no dia-a-dia dos cidadãos,

contribuindo para proporcionar diferentes aplicações matemáticas interdisciplinares que têm significados em todos os níveis de escolaridade.

Por intermédio das questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem dos conceitos iniciais relativos à média aritmética e das sugestões que abordamos em relação ao trabalho com o software R, enfatiza-se a importância de uma metodologia de ensino que permita aos alunos, com o uso dele, apropriarem-se gradativamente das idéias relacionadas à estatística desde os últimos anos do ensino fundamental.

Fica aqui a sugestão para os professores trabalharem situações que envolvam o conceito de média aritmética desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, explorando diferentes representações e invariantes.

Considerando o tratamento dado à apropriação das idéias iniciais relacionadas com o conceito de média aritmética, nas situações foi possível lidar com uma grande variedade de invariantes, colaborando para a apropriação desse conceito em estatística, segundo a teoria dos campos conceituais de Vergnaud.

Mas a apropriação das habilidades relacionadas ao entendimento da importância da média aritmética será muito útil para a compreensão das propriedades importantes dela, que emergem quando do tratamento com diversas situações, permitindo que os alunos as diferenciem e as compreendam.

Nós, professores, precisamos fazer com que as habilidades que são apropriadas pelos alunos no dia-a-dia da sala de aula sejam suficientes para permitir que eles possam escrever o que estão pensando, compreender, questionar, deduzir, tirar conclusões, levantar hipóteses e também realizar cálculos (de preferência e, quando possível, mentais), com a finalidade de torná-lo capaz de tomar decisões de modo consciente e, o melhor, corretamente.

Assim, as questões relacionadas à média aritmética favorecem a possibilidade de o aluno expressar-se, oralmente ou por escrito, de modo a que o professor possa ler e compreender os argumentos que utiliza.

Quando a Matemática permitir a análise de informações veiculadas em diferentes meios de comunicação e, a partir dessas análises, o aluno puder construir opiniões críticas e consistentes enquanto ele questiona essas informações, ela estará, enfim, oferecendo grande contribuição na formação do aluno enquanto cidadão, propiciando, assim, que ele se insira na sociedade como efetivo participante.

Com essas premissas, o aluno passa a compreender que a Matemática (em particular o conceito de média aritmética) não se reduz ao simples cálculo do seu valor através de um algoritmo de simples execução ou ao verdadeiro ou falso de suas proposições nem tampouco que existe apenas o possível e o impossível, mais que ela é muito mais que somente isso e, como consequência ela estará possibilitando que ele se torne um agente participe de sua própria estória.

Referências

[1] Anjos, D., Gitirana, V. (2008) Exploração do conceito de média nos livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental. Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, PP. 1-9.

[2] Batanero, C. Significado y comprensión de lãs medidas de posición central. Departamento de Didáctica de La Matemática, Universidade de Granada, 25, 41-58. Disponível em <http: //www.ugr.es/~batanero>. Acessado em 04/7/2011.

[3] Brasil. (1997) Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF.

[4] Brasil. (1998) Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática, 5ª a 8 série. Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF.

[5] Brousseau, G. (1986) Fondements et Méthodes de la Didactique dés Mathématiques. Recherches em Didactique dés Mathématiques, v.7, n.2, p.33-116, Paris.

[6] Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel.

[7] Fischbein, E., Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, v. 5, pp. 193-198.

[8] Inhelder, B., Piaget. J. (1955). De La logique de l'enfant à La logique de l´adolescent. Paris: P.U.F.

[9] Lerman, S. (1996) Investigações: Para onde vamos? . In P. ABRANTES, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Org.), Investigar para aprender matemática: Textos selecionados (pp. 107-115). Projeto Matemática Para Todos. APM - Associação de Professores de Matemática. Lisboa.

[10] São Paulo (Estado) (2010) Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias;Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – São Paulo: SEE.

[11] _____. (2009) Caderno do professor: matemática, ensino médio – 2ª série, volume 3/Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Carlos Eduardo de Souza Granja, José Luiz Pastore Mello, Nilson José Machado, Roberto Perides Moisés, Walter Spinelli. - São Paulo: SEE.

[12] Strauss, S., Bichler, E. (1988) The development of children's concepts of the arithmetic average. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 64-80.

[13] Vergnaut, G. (1991) El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemática en la escuela primária. Editorial Trillas. México.

Princípios de Escolha em Análise e Topologia

Samuel G. da Silva[a], João Paulo C. de Jesus[b]

[a] Universidade Federal da Bahia (Prof. Adjunto 4), *Email:* samuel@ufba.br

[b] Universidade de São Paulo (Estudante de Doutorado)

1. Introdução. Neste minicurso, discutiremos (e, em alguns casos, determinaremos exatamente) qual é a necessidade da ação de princípios de escolha para a obtenção de resultados bastante conhecidos de Análise e de Topologia. Os princípios de escolha que estaremos interessados em investigar são: o próprio Axioma da Escolha e algumas versões fracas do mesmo (tais como o Axioma da Escolha Enumerável). Resultados que podem ser obtidos sem o auxílio de princípios de escolha também serão apresentados, bem como resultados que, na verdade, são equivalentes a princípios de escolha: por exemplo, apresentaremos uma demonstração de que a asserção "Todo espaço topológico de base enumerável é separável" é equivalente ao Axioma da Escolha Enumerável. Aspectos bastante estranhos do chamado "Modelo Básico de Cohen" (no qual falha o Axioma da Escolha) serão apresentados em detalhe; por exemplo, em tal modelo existe um número real x e uma função real de variável real f que é sequencialmente contínua no ponto x – mas *não é* contínua nesse ponto.[1] A referência principal (em português) sugerida para este minicurso é a dissertação de mestrado do segundo autor ([8]), redigida sob a orientação do primeiro autor e disponível na Internet no banco de dissertações do Programa de Mestrado em Matemática da UFBA, PGMAT-UFBA (http://www.pgmat.ufba.br/PG-MAT-UFBA/Banco_de_Dissetacoes.html).

No que segue, **ZF** denota a Axiomática de Zermelo-Fraenkel *sem* o Axioma da Escolha, enquanto que **ZFC** denota a axiomática **ZF** acrescida do Axioma da Escolha.

2. Resultados que podem ser obtidos sem o auxílio de princípios de escolha. Existe uma alegoria – devida a Russell – que está enunciada em termos de famílias infinitas de pares de meias e de pares de sapatos: "Escolher uma meia de cada um entre infinitos pares de meias requer o Axioma da Escolha, mas para sapatos o Axioma não é necessário" (veja a capa da edição 42 da Revista Matemática Universitária, da SBM – na qual os autores publicaram o artigo de capa, [9] –, ou o site de Erich Schechter sobre o Axioma da Escolha – http://www.math.vanderbilt.edu/∼schectex/ccc/choice.html). Tal alegoria é um célebre exemplo que ilustra bem os contextos onde necessitamos do Axioma da Escolha - e os contextos nos quais não necessitamos dele. Dada uma família infinita de pares de sapatos, *não precisamos* do Axioma da Escolha para escolher exatamente um sapato de cada par: podemos, por exemplo, *sempre escolher o sapato correspondente ao pé esquerdo*. A estrutura "pé-esquerdo/pé-direito" de cada par de sapatos nos permite fazer uma escolha *não-arbitrária*: temos uma regra pré-estabelecida (e bem estabelecida), e observamos que não existe problema em fazer escolhas não-arbitrárias, mesmo que estas sejam feitas infinitas vezes ! [2] O problema surge quando

[1] Mais ainda, exibiremos em tal modelo um certo subconjunto de $\mathbb{R}$ que é tal que esse mesmo número real x está na aderência desse subconjunto mas – o que pode chocar o leitor – tal ponto *não é* limite de nenhuma sequência de pontos desse subconjunto !

[2] Observe que mesmo as funções reais elementares, às quais estamos bastante acostumados, podem ser encaradas como resultado

consideramos os infinitos pares de meia: em um par de meias, ambas as meias são indistinguíveis uma da outra, e portanto, para escolhermos uma das meias de cada par, necessariamente essa escolha acaba sendo *arbitrária* ! Observamos que a Lógica Finitária nos permite fazer um número *finito* de escolhas arbitrárias, sem maiores complicações: toda a problemática que estamos descrevendo é a que aparece quando temos que fazer um *número infinito de escolhas arbitrárias*: é exatamente esse o momento em que o Axioma da Escolha é indispensável.

Com isso, sabemos que um determinado resultado matemática pode ser provado em **ZF** - isto é, sem o uso do Axioma da Escolha - em uma das seguintes situações: quando sua prova não envolver escolhas arbitrárias, ou, quando houver escolhas arbitrárias, que essas sejam feitas apenas um número finito de vezes.

Apresentaremos nesse minicurso as (na maioria das vezes, bastante cuidadosas) demonstrações de que os seguintes resultados *não necessitam de nenhum princípio de escolha* em suas demonstrações:

Teorema. Um conjunto possui uma bijeção com uma parte própria (i.e., é *equipotente* a um subconjunto próprio) se, e somente se, existe uma função injetora com domínio $\mathbb{N}$ e contradomínio nesse conjunto.[3]

Dados X e Y conjuntos, a existência de uma função injetora de X em Y será denotada por $X \preccurlyeq Y$, o que se lê "X é dominado por Y". Notar que o teorema anterior garante que, mesmo sem o Axioma da Escolha, podemos afirmar que um conjunto possui uma bijeção com uma parte própria se, e somente se, possui um subconjunto enumerável infinito.[4]

Teorema. (Schröder-Bernstein-Cantor) Se X e Y são conjuntos tais que $X \preccurlyeq Y$ and $Y \preccurlyeq X$, então X e Y são equipotentes.

Com o auxílio do teorema anterior (e ainda usando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável), mostra-se em **ZF** que os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ são todos equipotentes entre si.

Teorema. O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é equipotente ao próprio conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.[5]

Teorema. A família das sequências finitas de elementos de $\mathbb{N}$ e a família dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ são conjuntos enumeráveis.[6]

Teorema. A união de qualquer família finita de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Teorema. O produto cartesiano de qualquer família finita de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Teorema. Todo espaço pseudométrico e separável possui uma base enumerável de abertos.

---

de infinitas escolhas não-arbitrárias, já que temos fórmulas para elas: no espaço de funções/produto cartesiano infinito $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ – que nada mais é do que um produto cartesiano da forma $\prod_{r \in \mathbb{R}} X_r$, onde cada $X_r = \mathbb{R}$ –, obtemos uma função como, por exemplo, $f(x) = 3.x + 1$, a partir de "escolhas não arbitrárias": para cada fator $\mathbb{X}_a = \mathbb{R}$, escolhemos o elemento $3.a + 1$.

[3] É bastante sabido que, em **ZFC**, a propriedade de possuir bijeção com uma parte própria caracteriza os conjuntos infinitos (inclusive, esta é a definição de *conjunto infinito* que aparece no famoso Dicionário Aurélio !!!), mas essa é uma questão que depende essencialmente de princípios de escolha, conforme será discutido em todo o minicurso.

[4] Lembre-se de que acabamos de comentar que a afirmação "Todo conjunto infinito possui uma bijeção com uma parte própria"(ou, equivalentemente, "Todo conjunto infinito possui um subconjunto enumerável infinito"), esta sim, necessita de algum princípio de escolha ! Veja a seção seguinte.

[5] Observamos que a afirmação "Para todo conjunto infinito X, o produto cartesiano $X \times X$ é equipotente a X" não só necessita do Axioma da Escolha em sua demonstração como, na verdade, é *equivalente* a ele ! (ver [7], pág.157)

[6] Conforme destacaremos na próxima seção, a asserção "A reunião uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável" depende de princípios de escolha.

Teorema. Se um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ tem base enumerável, então $\tau \preccurlyeq \mathbb{R}$.

Teorema. Se um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ for T_0 e de base enumerável, então $X \preccurlyeq \mathbb{R}$.

Teorema. Dados um espaço topológico X e um subconjunto A de X, então A é subespaço compacto se, e somente se, toda família de subconjuntos abertos de X que cobre A possui uma subfamília finita que cobre A.

Teorema. Todo intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ é um subespaço compacto.

Teorema. Todo espaço métrico separável é paracompacto.

Observamos que, do último teorema, e do fato de que não necessitamos do Axioma da Escolha para concluir que a reta é um espaço métrico separável, temos que a paracompacidade de $\mathbb{R}$ pode ser estabelecida mesmo sem o uso do Axioma da Escolha; o mesmo não ocorre para espaços métricos em geral.[7]

3. Resultados que podem ser obtidos com o Axioma da Escolha Enumerável.

Uma versão mais fraca do Axioma da Escolha – a qual já é suficiente para muitas aplicações – é o chamado Axioma da Escolha Enumerável (o qual denotaremos $\mathbf{AC}_\omega$), que consiste na restrição do Axioma da Escolha para famílias *enumeráveis* de conjuntos não-vazios.

Os seguintes resultados são provados com o auxílio do Axioma da Escolha Enumerável, e, na maioria dos casos, destacaremos neste minicurso exatamente quais são as passagens de suas demonstrações onde escolhas arbitrárias serão necessárias – mas verificaremos que essas escolhas ocorrem no máximo um número enumerável de vezes![8]

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega$) Todo conjunto infinito é Dedekind-infinito, i.e., é equipotente a um subconjunto próprio.[9]

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega$) A união de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega$) Todo espaço topológico enumeravelmente compacto e discreto é finito.

Lema.($\mathbf{AC}_\omega$) Dado um espaço topológico X que seja T_1, as seguintes asserções sobre X são equivalentes:

(i) X é enumeravelmente compacto.

(ii) Todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação.

(iii) Todo subconjunto infinito e enumerável de X tem um ponto de acumulação.

(iv) Toda família localmente finita de subconjuntos não-vazios de X é finita.

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega$) Todo espaço topológico T_1, enumeravelmente compacto e paracompacto é compacto.

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega$) O primeiro ordinal não-enumerável (denotado por ω_1), munido da topologia da ordem, não é paracompacto.

[7] Ver comentários e nota de rodapé na página 89 de [3].

[8] Ou seja, aqui o trabalho, em geral, consiste em verificar cuidadosamente que as demonstrações usuais – as que conhecemos e que estão nos livros de topologia, como por exemplo em nossa referência [2] – já estão naturalmente redigidas nas condições do Axioma da Escolha Enumerável, ou então podem ser adequadamente modificadas para que estejam sob essas condições.

[9] Com relação a essa implicação "infinito $\Rightarrow$ Dedekind-infinito" , destacamos que a implicação contrária não necessita de nenhum princípio de escolha, seguindo do bastante conhecido Princípio da Casa dos Pombos ! E destacamos ainda que no chamado "Modelo Básico de Cohen" (no qual falha o Axioma da Escolha Enumerável) existe um subconjunto infinito da reta que *não é* Dedekind-infinito; trataremos de tal modelo mais adiante.

Com relação ao teorema anterior, destacamos que é consistente que o primeiro ordinal não-enumerável seja paracompacto ([3]; veja também [8] e [10]): na verdade, tal fenômeno – a paracompacidade de ω_1 – ocorrerá em qualquer modelo onde esse ordinal tenha *cofinalidade enumerável* ([10]).

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega$) Todo espaço topológico com base enumerável é tal que qualquer base contém uma subfamília enumerável que também é base.

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega$) Todo espaço topológico com base enumerável é separável.

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega$) Todo espaço topológico com base enumerável é Lindelöf.

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega$) Todo espaço pseudométrico Lindelöf tem base enumerável.

Os resultados desta seção, quando analisados em conjunto, possuem o seguinte e interessante

Corolário.($\mathbf{AC}_\omega$) Dado um espaço pseudométrico X, são equivalentes:

(i) X tem base enumerável.

(ii) X é tal que toda base de abertos possui uma subfamília enumerável que também é base.

(iii) X é separável.

(iv) X é Lindelöf.

Com relação ao corolário anterior, destacamos que existe na literatura um exemplo consistente de um espaço métrico compacto (logo Lindelöf) que não tem base enumerável, e, conseqüentemente, não é separável ! [10]

4. O Axioma da Escolha Enumerável, restrito às famílias enumeráveis de subconjuntos da reta.

Restringindo um pouco mais o Axioma da Escolha Enumerável, obtemos $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$, o qual declara que famílias enumeráveis de subconjuntos não-vazios da reta possuem função-escolha. Os seguintes resultados são provados usando $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ – e observamos que a maioria dele consiste, na verdade, em refinamentos de teoremas demonstrados na seção anterior (mais especificamente, redemonstramos *os mesmos enunciados*, só que *usando uma hipótese mais fraca* - e destacamos aqui que é consistente que tal hipótese seja estritamente mais fraca).[11]

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$) Todo espaço topológico enumerável é Lindelöf.

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$) Todo espaço topológico com base enumerável é tal que qualquer base de abertos contém uma subfamília enumerável que também é base.

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$) Todo espaço topológico T_0 que tem base enumerável é separável.

Teorema.($\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$) Todo espaço topológico que tem base enumerável é Lindelöf.

5. Estranhezas no Modelo Básico de Cohen.

A invenção do método de forcing nos anos 60 do séc. XX (por Cohen) é normalmente mais lembrada por sua relação com a independência da Hipótese do Contínuo em relação aos axiomas usuais da Teoria dos Conjuntos; no entanto, exatamente no mesmo trabalho também foi verificada a independência do Axioma da Escolha com relação a esses mesmos axiomas ! O chamado "Modelo Básico de Cohen"(o qual denotaremos por $\mathcal{M}1$, seguindo a literatura atual – veja nossa referência [6])

[10] Exemplo 6.4 de [3], construído no modelo $\mathcal{M}7$ de [6]; veja a demonstração de suas propriedades na pág.80 de [8].

[11] No chamado Segundo Modelo de Fraenkel, $\mathcal{N}2$ em [6], vale $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$ – mas não vale $\mathbf{AC}_\omega$.

é o modelo apresentado naquela ocasião por Cohen, no qual valem os axiomas de **ZF** mas não é válido o Axioma da Escolha (na verdade, sequer o Axioma da Escolha Enumerável é válido nesse modelo). Nesse modelo, temos fatos possivelmente chocantes para o leitor que está acostumado a usar, ainda que implicitamente, o Axioma da Escolha em sua matemática do dia-a-dia: apresentamos a seguir uma lista de fatos bastante estranhos desse modelo (sendo todos, portanto, *asserções consistentes*), e destacamos que todos seguem do primeiro fato citado, o qual envolve conjuntos infinitos e Dedekind-infinitos. A principal referência para esta seção é o clássico livro de Jech sobre Axioma da Escolha ([7], Capítulo 10).

Fato. Em $\mathcal{M}1$, existe um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ que não possui subconjunto infinito enumerável.

Fato. Em $\mathcal{M}1$, $\mathbb{R}$ não pode ser bem ordenado.

Fato. Em $\mathcal{M}1$, existem um número real x e um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que x pertence ao fecho de A, mas nenhuma sequência de pontos de A converge para x.

Fato. Em $\mathcal{M}1$, existe um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ que é tal que toda sequência de pontos de A possui uma subsequência convergente, mas A não é fechado nem limitado em $\mathbb{R}$.[12]

Fato. Em $\mathcal{M}1$, existem um número real x e uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f é sequencialmente contínua em x, mas f não é contínua em x.[13]

Fato. Em $\mathcal{M}1$, existe um espaço métrico que é separável, e, consequentemente, tem base enumerável, mas não é Lindelöf.

6. Algumas equivalências com princípios de escolha. Nas seções anteriores, mostramos que certos resultados de Análise e Topologia são obtidos, usualmente, assumindo-se (ainda que implicitamente) princípios de escolha: em seguida, vimos no Modelo Básico de Cohen que se retirarmos esses princípios de escolha, tais resultados não são mais necessariamente válidos. Nesta última seção, vamos "justificar" o motivo de não podermos descartar princípios de escolha em alguns desses casos: vamos mostrar que vários resultados bastante conhecidos de Análise e de Topologia são, na verdade, *equivalentes* a princípios de escolha. As principais referências para esta seção são trabalhos relativamente recentes (anos 90) de Herrlich, em parceria com coautores (Strecker, Bentley).

Apresentaremos demonstrações para as seguintes equivalências, todas válidas em **ZF**:

Teorema. ([5], [8]) São equivalentes:

(0) Todo espaço topológico enumerável é Lindelöf.

(1) $\mathbb{N}$ é Lindelöf.

(2) $\mathbb{Q}$ é Lindelöf.

(3) $\mathbb{R}$ é Lindelöf.

(4) Todo espaço topológico que tem base enumerável é Lindelöf.

[12] Note que estamos, portanto, exibindo um subconjunto da reta que é sequencialmente compacto, mas não é compacto !

[13] Aqui temos uma grande sutileza: para *cada* ponto x, a asserção "Se uma função real de variável real é sequencialmente contínua em x, então ela é contínua em x" não é, como se pode ver, um teorema de **ZF** (e, mais adiante, veremos que tal afirmação é na verdade *equivalente* a $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$!) – no entanto, se supusermos que uma função real de variável real é sequencialmente contínua *em todos os pontos* de $\mathbb{R}$, pode-se provar em **ZF** que tal função é contínua - veja pág.30 de [4].

(5) Todo subespaço de $\mathbb{R}$ é separável.

(6) Todo espaço topológico T_0 que tem base enumerável é separável.

(7) Dados um número real x e um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, x está no fecho de A se, e somente se, existe uma sequência de pontos de A que converge para x.

(8) Dados um número real x e uma função real de variável real f, então f é contínua em x se, e somente se, f é sequencialmente contínua em x.

(9) Todo subconjunto ilimitado de $\mathbb{R}$ possui um subconjunto enumerável ilimitado.

(10) $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$.

Teorema. ([1], [8]) São equivalentes:

(i) $\mathbf{AC}_\omega$.

(ii) Todo espaço topológico que tem base enumerável é separável.

(iii) Todo espaço pseudométrico Lindelöf é separável.

(iv) Todo espaço pseudométrico compacto é separável.

Para finalizar, observamos que existem ainda problemas em aberto no que se refere ao exato poder de consistência de certas asserções sobre espaços métricos (o contexto para espaços métricos é bastante mais complicado do que o contexto análogo para pseudométricos, conforme destacou Herrlich em [4]).

Questão. ([8], [10]) A asserção "Todo espaço métrico Lindelöf é separável" é equivalente a $\mathbf{AC}_\omega$? Em caso negativo, existe algum princípio de escolha estritamente mais fraco com relação ao qual essa asserção é equivalente ?

Referências

[1] Bentley, H., e Herrlich, H. (1998) *Countable choice and pseudometric spaces.* Topology and its Applications, v.**85**, 1–3, 153–164.

[2] Engelking, R. (1989) *General Topology.* rev. compl. ed., Berlin, Heldermann (Sigma Series in Pure Mathematics, 6), viii + 529 pp.

[3] Good, C., e Tree, I. (1995) *Continuing horrors of topology without choice.* Topology and its Applications, v.**63**, 1, 79–90.

[4] Herrlich, H. (2006) *Axiom of Choice.* Lecture Notes in Mathematics, 1876, Springer Berlin Heidelberg, XI + 194 pp.

[5] Herrlich, H. e Strecker, G. (1997) *When is $\mathbb{N}$ Lindelöf ?.* Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, v.**38**, 3, 553–556.

[6] Howard, P. e Rubin, J. (1998) *Consequences of the Axiom of Choice.* Mathematical Surveys and Monographs, 59, American Mathematical Society, vii + 432 pp.

[7] Jech, T. (1973) *The Axiom of Choice.* Studies in Logic and Foundations of Mathematics 75, Amsterdam, North Holland, 202 pp.

[8] de Jesus, J. P. C. (2010) *Espaços Métricos e Topológicos na Ausência do Axioma da Escolha.* Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática UFBA, 116 pp.

[9] de Jesus, J. P. C., e da Silva, S. G. (2007) *Cem Anos do Axioma da Escolha: Boa Ordenação, Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff.* Revista Matemática Universitária (RMU/SBM), 42, 16–34.

[10] de Jesus, J. P. C., e da Silva, S. G. (2011) *Linearly Ordered Spaces and Countable Choice.* Trabalho apresentado no XVI Encontro Brasileiro de Lógica (Petrópolis, 2011) e submetido para publicação.

Rotações, Quatérnions e Álgebras de Clifford

Eliezer Batista[a]

[a] Universidade Federal de Santa Catarina, *Email:* eliezer1968@gmail.com

1 Introdução

Ao longo da história da Matemática, grandes avanços foram realizados por por meio da correlação de tópicos matemáticos até então dissociados. Esta inter-relação propicia uma compreensão mais ampla dos objetos matemáticos envolvidos e nos auxilia na obtenção de novos resultados. A interação entre a geometria e a álgebra, por exemplo, tem crescido desde a criação da Geometria analítica por René Descartes e sempre contribuiu seja na melhor descrição das propriedades dos objetos geométricos por meio de relações algébricas, ou na visualização geométrica de conceitos algébricos. Um exemplo historicamente notável desta correlação entre a geometria e a álgebra se deu na criação do plano complexo, por Argand e Gauss. Até o início do século XIX, os números complexos eram apenas um artifício introduzido para a resolução de equações algébricas, mas ninguém sabia interpretar corretamente o que seria um número complexo. A representação dos números complexos como pontos no plano foi fundamental para a difusão do uso de números complexos não só em matemática como também nas ciências naturais e nas engenharias [10].

O sucesso no uso dos números complexos na descrição da geometria analítica no plano motivou, em meados do século XIX, a busca de estruturas algébricas semelhantes que pudessem servir de modelo para a geometria analítica no espaço tridimensional. A invenção dos quatérnions, em 1843, foi o resultado desta pesquisa, empreendida pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton. No entanto, os quatérnions são uma estrutura algébrica que pode ser vista como um espaço quadridimensional. De fato, o conjunto dos números quatérnions é formado por elementos da forma $q = a + bi + cj + dk$, com a, b, c, d sendo números reais e os geradores i, j, k satisfazendo às relações definidoras

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Estas relações levam à conclusão imediata que a multiplicação dos quatérnions não é comutativa. Formulações apropriadas para a geometria e o cálculo vetorial em três dimensões foram elaboradas a partir dos quatérnions pelo físico americano Josiah Willard Gibbs e, de maneira independente, pelo engenheiro elétrico inglês Oliver Heaviside, ambos motivados pela descrição das equações de Maxwell para os campos eletromagnéticos. Basicamente, o espaço tridimensional pode ser visto como um quociente dos quatérnions pela parte real, assim os vetores do espaço podem ser escritos como combinações lineares (das classes) dos vetores i, j e k e a não comutatividade do produto nos quatérnions é codificada no produto vetorial, enquanto a parte real do produto nos quatérnions nos dá o que hoje conhecemos como produto escalar, ou produto interno entre vetores.

Por um lado, a simplificação dos quatérnions para o seu uso na geometria tridimensional produziu enormes avanços na teoria eletromagnética e na mecânica de meios contínuos em geral. Por outro lado, a invenção dos

quatérnions em si trouxe dois avanços teóricos fundamentais: Primeiramente, os quatérnions introduziram no cenário matemático a possibilidade do estudo de geometrias de espaços com dimensão maior que três. Em segundo lugar, a não comutatividade do produto motivou naturalmente o estudo de estruturas algébricas não comutativas. Este estudo da geometria de espaços de dimensões superiores, e seu relacionamente com álgebras não comutativas, teve um grande desenvolvimento ainda na segunda metade do século XIX, o que inclui as contribuições de dois importantes matemáticos: o matemático alemão Hermann Grassmann e o inglês William Kingdon Clifford.

As álgebras geométricas de Clifford surgiram pela primeira vez no artigo "Preliminary sketch of bi-quaternions, Proc. London Math. Soc. Vol. 4 (1873) pp. 381-395. Desde então, as álgebras de Clifford permaneceram apenas como uma abstração matemática por várias décadas até que a descoberta do spin do elétron fez, incidentalmente, com que os físicos a redescobrissem. Mais especificamente, o físico britânico Paul Adrien Maurice Dirac, ao derivar uma equação quântica para o elétron relativístico[1], foi levado às relações que definem a álgebra geométrica de Clifford para o espaço de Minkowski quadridimensional. Basicamente, a intenção era obter um operador diferencial de primeira ordem cujo quadrado resultasse no operador D'Alembertiano

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

onde c é a velocidade da luz. A solução do problema de fatoração deste operador envolve um conjunto de quatro matrizes 4×4, hoje conhecidas com matrizes de Dirac [11], γ^0, γ^1, γ^2 e γ^3, satisfazendo às condições

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \eta^{ij} I,$$

onde I é a matriz identidade 4×4 e η^{ij} são as componentes matriciais da métrica de Minkowski: $\eta^{00} = -1$, $\eta^{ii} = 1$, para $i \in \{1, 2, 3\}$ e $\eta^{ij} = 0$ para $i \neq j$. No espaço de Minkowski, os índices das coordenadas variam de 0 até 3, sendo $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$. Com esta convenção, o operador de Dirac, que é a raiz quadrada do D'Alembertiano, pode ser escrito como

$$\partial\!\!\!/ = \sum_{i=0}^{3} \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

A priori, este artifício matemático para fatorar um operador diferencial de segunda ordem poderia não fornecer qualquer implicação mais profunda do ponto de vista geométrico. O surpreendente é que as álgebras de Clifford estão intimamente relacionadas com os grupos de rotação e suas representações. O exemplo mais simples e relevante é a conexão existente entre o grupo $SO(3)$, constituído pelas matrizes ortogonais reais 3×3 de determinante unitário (que são as matrizes de rotação no espaço tridimensional) e o grupo $SU(2)$, das matrizes complexas unitárias 2×2 de determinante unitário. Esta conexão surgiu pela primeira vez com os parâmetro de Cayley-Klein para descrever o movimento de um corpo rígido [9]. Também estes dois grupos aparecem interconectados na descrição do spin do elétron (em mecânica quântica não relativística) através das matrizes de Pauli [13]. As representações destes dois grupos também estão relacionadas, basicamente, as representações do grupo $SU(2)$ incluem todas as representações do grupo $SO(3)$ além de uma classe infinita de representações conhecidas como representações espinoriais [1, 5]. As representações espinoriais apareciam naturalmente em mecânica quântica para descrever as funções de onda dos elétrons, que eram denominadas espinores. Uma

[1] Hoje esta equação é conhecida como equação de Dirac.

formulação puramente geométrica da teoria dos espinores se deve ao matemático francês Élie Cartan [2]. Esta relação entre os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$ se estendem para dimensões mais altas e são descritas por meio das álgebras de Clifford com os grupos Pin e Spin.

Atualmente, a importância das álgebras de Clifford perpassa diversas áreas da Matemática, da Física e das Engenharias. Em Matemática, podemos citar o uso de álgebras de Clifford em teoria de representações de grupos e análise harmônica [1], como também em geometria diferencial, com as estruturas de spin em variedades [6]. Em Física, as partículas responsáveis pela formação da matéria, os férmions, são partículas de spin semi inteiro, portanto suas funções de onda são dadas por espinores, portanto, esta estrutura matemática é imprescindível no estudo de qualquer fenômeno quântico, seja em física nuclear, física de matéria condensada, teoria quântica de campos, física de partículas elementares, etc. Mais recentemente, devido à sua versatilidade na descrição de transformações geométricas, as álgebras de Clifford passaram a ser utilizadas inclusiva nas engenharias, mais especificamente em robótica [12]. O problema principal é descrever o movimento de um robô em duas ou três dimensões, isto envolve não somente rotações, mas também translações, ou seja, ações do grupo euclidiano tridimensional, estas transformações geométricas do grupo euclidiano podem ser implementadas inclusive com vantagem do ponto de vista computacional, através da álgebra dos quatérnions duais [12], que é uma álgebra de Clifford associada a uma forma quadrática degenerada.

2 Objetivos

O objetivo deste minicurso é apresentar ao estudante de graduação a interação entre a geometria a a álgebra, utilizando para isto a linguagem dos quatérnions e das álgebras de Clifford. Em geral, nos currículos dos cursos de graduação em matemática nas universidades brasileiras, as disciplinas de álgebra abstrata (envolvendo anéis e grupos) e as disciplinas de geometria (mais especificamente geometria diferencial), são oferecidas de maneira estanque, sem que haja uma apresentação de suas interrelações. Por exemplo, em álgebra dificilmente se aborda, nem a título de exemplo, os grupos lineares e subgrupos destes (os grupos ortogonais, unitários, etc), que são exemplos de grupos contínuos, dotados de estrutura geométrica. Por outro lado, em geometria, pouca ênfase é dada às ações de grupos sobre objetos geométricos. Nosso intuito é mostrar, através do estudo de casos concretos, a riqueza de conexões existente entre a geometria a e álgebra.

Basicamente, o exemplo motivador será o das rotações no plano e no espaço. Quanto às rotações no plano, elas estão associadas aos números complexos unimodulares, ou seja, ao círculo unitário no plano complexo. Já as rotações em três dimensões dependem da definição de um vetor unitário no espaço, que é o eixo de rotação, e de um número real, que é o ângulo de rotação. É um pouco menos trivial ver que as rotações no espaço estão associadas aos pontos da esfera tridimensional (os vetores de comprimento unitário no espaço quadridimensional) com os pontos antípodas identificados (isto é o que chamamos de espaço projetivo tridimensional real). Menos evidente ainda é a relação que as rotações no espaço possuem com os quatérnions unitários, basicamente, um quatérnion unitário codifica em si, tanto o eixo de rotação quanto o ângulo de rotação. Além do mais existe uma associação de dois quatérnions unitários para cada rotação. Objetivamos estudar detalhadamente estas conexões, tanto do ponto de vista algébrico, como geométrico e topológico, explorando também, sempre que possível algumas aplicações inclusive nas ciências naturais.

Nossa intenção também é mostrar que a estrutura de álgebra de Clifford possibilita a passagem para dimensões superiores de muitas idéias intuitivas existentes em dimensões 2 ou 3. Em particular, podemos ver que as transformações dos grupos euclidianos (rotações e translações) podem também ser codificadas utilizando álgebras de Clifford, para isto apresentaremos como exemplo os quatérnions duais, muito utilizados atualmente em Robótica.

3 Público Alvo e Pré-Requisitos

Este minicurso visa atingir principalmente estudantes de graduação dos cursos de matemática, tanto de licenciatura quanto de bacharelado, também sendo aberto a estudantes de outras áreas de exatas (Física, Engenharia) que sejam curiosos quanto ao assunto. Devido às intenções de atingir um público amplo, este curso está planejado para ser o mais auto contido possível, exigindo da audiência apenas um conhecimento básico de álgebra linear.

4 Estrutura do Curso

Este minicurso está planejado para 6 horas-aula dividido em 3 aulas. As subdivisões do curso correspondem, aproximadamente às subdivisões do material didático pretendido. A diferença entre material didático escrito e o conteúdo das aulas está no fato de que tentaremos colocar todos os detalhes das demonstrações dos resultados principais para que o estudante tenha uma leitura independente. Também temos a intençaõ de colocarmos no material didático dados históricos e textos complementares que levem o estudante à leitura de outras referências bibliográficas mais aprofundadas sobre o tema.

4.1 Primeira Aula

- Prelimirares algébricos: grupos e homomorfismos.
- Grupos lineares (reais e complexos) e seus subgrupos: $GL(n)$, $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, grupos euclidianos.
- Rotações no plano e números complexos unitários. Os grupos $SO(2)$ e $U(1)$.
- Rotações no espaço, o grupo $SO(3)$.

4.2 Segunda Aula

- Os quatérnions como álgebra de divisão.
- O grupo dos quatérnions unitários, a esfera $\mathbb{S}^3$.
- Representação das rotações em três dimensões usando quatérnions.

- A relação entre os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$, via quatérnions.
- Aspectos topológicos (recobrimentos, espaços projetivos, fibração de Hopf, etc...)

4.3 Terceira Aula

- Introdução às álgebras de Clifford.
- Exemplos em dimensões mais baixas
- Os grupos *Pin* e *Spin*.
- O grupo euclidiano e os quatérnions duais.

Referências

[1] Altmann, S.L. (1986) *Rotations, Quaternions and Double Groups.* Dover Inc, New York

[2] Cartan, E. (1966) *The Theory of Spinors.* Dover Inc, New York

[3] Conway, J.H. and Smith, D.E. (2003) *On Quaternions and Octonions.* A.K. Peters Ltd, Wellesley, MS

[4] Garling, D.J.H. (2011) *Clifford Algebras: An Introduction.* Cambridge U. Press, Cambridge

[5] Hladik, J. (1999) *Spinors in Physics.* Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg

[6] Lawson Jr., H.B. and Michelsohn, M.L. (1989) *Spin Geometry.* Princeton U. Press, Princeton, NJ

[7] Lyons, D.W. (2003) An Elementary Introduction to the Hopf Fibration. *Mathematics Magazine* **Vol, 76, No.2**, 87–98.

[8] Marénitch, A., Ananin, A. and Bozhkov, Y. (1998) A 3-Esfera e seus Familiares. O Fibrado de Hopf. *Mathematics Magazine* **Vol, 76, No.2**, 87–98.

[9] Marsden, J.E. and Ratiu, T.S. (1999) *Introduction to Mechanics and Symmetry* 2nd Ed.. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg

[10] Nahin, P.J. (1998) *An Imaginary Tale, The Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton U. Press, Princeton, NJ

[11] Ryder, L.H. (1996) *Quantum Field Theory* 2nd Ed.. Cambridge U. Press, Cambridge

[12] Selig, J.M. (2010) *Geometric Fundamentals of Robotics.* Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg

[13] Zettili, N. (2001) *Quantum Mechanics, Concepts and Applications.* John Willey & Sons LTD, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Sigapore, Toronto

SISTEMAS IMPULSIVOS AUTÔNOMOS

MARTA C. GADOTTI* E SELMA H. J. NICOLA†

1. Introdução

Diz-se que a evolução de um sistema é impulsiva quando o estado alterna estágios de variação contínua com instantes de descontinuidade. Estes instantes representam estágios de variação em tão curto lapso que na prática podem ser considerados instantâneos.

Um recurso matemático para se estudar este assunto são as equações diferenciais impulsivas. Estas na verdade não se resumem a equações diferenciais, uma vez que incluem condições externas que definem descontinuidades de primeira espécie das soluções. Há mais de quarenta anos alguns livros e muitos artigos têm sido publicados sobre esse tema. Veja [3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16], por exemplo.

A maior parte das publicações sobre equações impulsivas trata do caso em que os instantes de impulso, $t_1, t_2, \ldots$, são previamente dados ou de generalizações em que tais instantes, $t_i = t_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, dependem do estado x. Esses sistemas não são autônomos, mesmo quando a equação diferencial envolvida o seja.

O tipo de sistema impulsivo de que tratamos aqui não se enquadra nessas condições e é menos ocorrente na literatura, embora apresente características especiais muito interessantes, além de poder modelar problemas relevantes da mecânica, biologia, farmacodinâmica, economia etc. Em nosso caso, a equação diferencial envolvida é autônoma e os instantes de impulso são aqueles em que o estado atinge determinados valores críticos. Em geral, tais valores são definidos por alguma condição de natureza geométrica no espaço de fase. Desta forma, o sistema impulsivo como um todo é autônomo e define um sistema dinâmico descontínuo no espaço de fase.

2. Definições e exemplos

Precisamente, os sistemas impulsivos considerados neste texto são da forma (veja Myshkis[15, Sec. 2])

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{se } x(t) \notin M, \tag{2.1}$$

$$x(t) \in M \quad \Rightarrow \quad x(t+) = F(x(t)). \tag{2.2}$$

onde f é uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 (o que garante existência e unicidade de soluções dos problemas de valor inicial associados a (2.1)), $M \subset \mathbb{R}^n$ é um dado conjunto fechado e F é uma aplicação do conjunto M em $\mathbb{R}^n$.

Dado $a \in \mathbb{R}^n$, uma solução $x = \phi(t; a)$ do sistema impulsivo (2.1), (2.2) satisfazendo a condição inicial

$$x(0) = a \tag{2.3}$$

é definida da seguinte forma:

Se $a \notin M$, então $\phi(t; a)$ é a solução $x(t; a)$ do problema de valor inicial ordinário (2.1), (2.3) em $[0, t_1]$, onde $t_1 = t_1(a)$ é o menor dos valores $t > 0$ tais que $x(t; a) \in M$, se um tal t_1 existir. Definimos $\phi(t_1+; a) = F(\phi(t_1; a))$. Tomamos $\phi(t; a) = x(t; \phi(t_1+; a))$, em $(t_1, t_2]$, onde $x(t, \phi(t_1+; a))$ é a solução de (2.1) que satisfaz $x(t_1) = \phi(t_1+; a)$ e t_2 é o menor dos valores $t > t_1$ tais que $x(t, \phi(t_1+; a)) \in M$, se t_2 existir, e assim por diante. Caso não exista t_1, definimos $\phi(t; a)$ como $x(t; a)$ em todo o seu intervalo máximo de existência à direita. Se $a \in M$, tomamos $t_1 = 0$ e construímos $\phi(t; a)$ seguindo o procedimento que acabamos de descrever.

Na definição da solução $\phi(t; a)$ poderia ocorrer $F(\phi(t_1; a) \in M$ e $x(t; \phi(t_1+; a)) \in M$, se $t \in (t_1, t_1 + \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$. Neste caso o instante de impulso t_2 não estaria definido e a construção de $\phi(t; a)$ não poderia ser efetivada. Para evitar ocorrências deste tipo supomos que F satisfaz a seguinte hipótese ao longo deste texto:

(H) Se $a \in M \cap F(M)$, então $x(t; F(a)) \notin M$, $t \in (0, \epsilon)$ para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Uma importante propriedade dos sistemas impulsivos do tipo (2.1), (2.2) (que o leitor pode verificar como exercício) é que, dado $\tau \in \mathbb{R}$, se $\phi(t)$ é uma solução de (2.1), (2.2) para t em um intervalo $J \subset \mathbb{R}$, então $\phi(t + \tau)$ é uma solução de (2.1), (2.2) no intervalo $J - \tau$. Em virtude desta propriedade, dado $t_0 \in \mathbb{R}$, a solução do problema impulsivo de valor inicial (2.1), (2.2), mais a condição $x(t_0) = a$ é $\phi(t - t_0; a)$.

Os instantes de impulso da solução $\phi(t; a)$ do problema de valor inicial (2.1), (2.2), (2.3) podem ocorrer em número finito ou infinito. No primeiro caso, para um certo instante de impulso t_k, não existe um $t_{k+1} > t_k$ tal que $\phi(t_{k+1}; a) \in M$. Neste caso tomamos $\phi(t; a) = x(t)$,

onde $x(t)$ é a solução de (2.1) tal que $x(t_k) = \phi(t_k+; a)$ para todo t pertencente ao intervalo máximo de existência à direita de $x(t)$, $[t_k, \omega)$.

Os exemplos apresentados a seguir são de Myshkis [15, Sec. 2]. Todos eles se referem ao caso $n = 2$ com campo vetorial $f(x_1, x_2) = (-1, 0)$, isto é, à equação

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -1 \\ \dot{x}_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$ e $F(0, x_2) = (1, x_2)$.

Se o valor inicial é $a = (0, 0) \in M$, a solução $\phi(t; a)$ tem descontinuidades nos pontos $t = 0, 1, 2, \ldots$ e é periódica com período 1, para $t \geqslant 0$. Na verdade esta solução pode ser obviamente estendida a uma solução periódica em $(-\infty, \infty)$.

Exemplo 2.2. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0,\ x_1 x_2 = 1\}$ e $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 1)$.

Se o valor inicial é $a = (4, 1/4) \in M$, a solução $\phi(t; a)$ é descontinua em $t = 0,\ 16/5, \ldots,\ 4\big[1 - 1/(4n + 1)\big], \ldots$

Exemplo 2.3. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$ e $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2/2)$.

Se o valor inicial é $a = (1, 1) \in M$, a solução $\phi(t; a)$ é descontínua em $t = 0, 1 - (1/2), 1 - (1/2^2), \ldots$.

Exemplo 2.4. $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = |x_2| - 1\}$ com $F(x_1, x_2) = (x_1, -(1 + x_1/2) \operatorname{sgn} x_2)$.

Se o valor inicial é $a = (1,\ 2) \in M$, a solução $\phi(t; a)$ tem descontinuidades nos pontos $t = 0,\ 1 - (1/2),\ 1 - (1/2)^2, \ldots$.

Como já foi observado, no exemplo 2.1 o intervalo máximo de existência à direita da solução $\phi(t; a)$ é $[0, \infty)$ e ela pode ser estendida a $(-\infty, \infty)$ por periodicidade.

No exemplo 2.2, o intervalo máximo de existência à direita da solução $\phi(t; a) = (\phi_1(t; a), \phi_2(t; a))$ é $[0, 1)$, a componente $\phi_2(t; a)$ é constante por partes, $\phi_1(1-; a) = 0$ e $\phi_2(1-; a) = \infty$.

No exemplo 2.3, o intervalo máximo de existência à direita da solução $\phi(t; a) = (\phi_1(t; a), \phi_2(t; a))$ é $[0,\ 1)$, a componente $\phi_2(t; a)$ é constante por partes e $\phi(1-; a) = 0$. Se a condição inicial for $a = (a_1,\ a_2)$, com $a_2 < 0$, o intervalo máximo de existência à direita de $\phi(t; a)$ é $[0, \infty)$ e a solução $\phi(t; a)$ pode sofrer no máximo um impulso. A função $\phi(t) \equiv 0$ é uma solução não impulsiva do sistema impulsivo (2.1), (2.2) definida em $(-\infty, \infty)$.

No exemplo 2.4, o intervalo máximo de existência à direita da solução $\phi(t; a) = (\phi_1(t; a), \phi_2(t; a))$ é $[0,\ 1)$, a componente $\phi_2(t; a)$ é constante

por partes e oscila alternando valores $\phi_2(t;a) > 1$ e $\phi_2(t;a) < -1$, com $t \to 1-$. Portanto não existe $\phi(1-;a)$.

Na figura 1 estão representadas as órbitas da solução $\phi(t;a)$ em cada um dos exemplos acima.

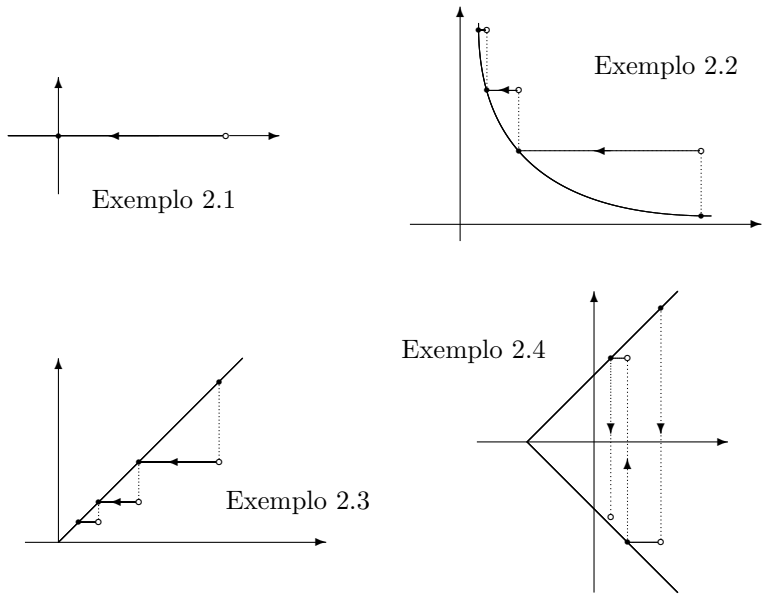


Figura 1.

3. Algumas aplicações

3.1. **Absorção de drogas por organismos vivos.** Apresentamos uma aplicação do modelo proposto por Kruger-Thiemer [10] para descrever a distribuição de uma droga no corpo humano em consequência da prescrição de algum medicamento por via oral. O modelo original se refere a um tratamento por doses com hora marcada. Isto é, a ingestão das doses é representada por impulsos em instantes prefixados, $t_1 < t_2 < \ldots$. Aqui, entretanto, consideramos uma situação de pesquisa em que se estuda a utilização de um medicamento novo. O objetivo é determinar uma prescrição eficiente, estabelecendo o período e o tamanho das doses. Não conhecendo *a priori* um horário para a ingestão da droga, decidimos que as doses sejam tomadas quando um monitoramento indicar que sua concentração no sangue do paciente tenha atingido um nível mínimo recomendado.

A droga é introduzida no organismo pelo aparelho digestivo, é então absorvida pelo aparelho circulatório e, finalmente, eliminada. Num

instante t, indicamos com $x(t)$ e $y(t)$ as quantidades de droga nos aparelhos digestivo e circulatório, respectivamente. Se k_1 é a taxa de absorção da droga pela corrente sanguínea e k_2 é a taxa de eliminação pelos rins, a dinâmica da distribuição da droga no corpo humano é descrita pelo sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -k_1 x, \\ \dot{y} &= \quad k_1 x - k_2 y. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Vamos nos fixar no caso $k_1 \neq k_2$. Supostamente o organismo é livre da droga nos aparelhos digestivo e circulatório quando do início do tratamento, que começa com uma dose d_0. Ou seja, impomos a condição inicial

$$(x(0), y(0)) = (d_0, 0). \tag{3.2}$$

A solução do problema de valor inicial (3.1), (3.2) é

$$(x(t), y(t)) = d_0\Big(e^{-k_1 t},\ \frac{k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})\Big),$$

logo $x(t)$, $y(t) > 0$, $0 < t < \infty$, e $(x(t),\, y(t)) \to (0,\, 0)$, com $t \to \infty$. Como, de acordo com (3.1), $\dot{y}(0) > 0$, existe um ponto de máximo de y, $\bar{t} = (\ln k_1 - \ln k_2)/(k_1 - k_2)$, o qual é único. O valor de máximo é

$$y(\bar{t}) = d_0 e^{-k_2 \bar{t}}. \tag{3.3}$$

Se um tratamento prescreve uma dose d a cada momento em que a quantidade de droga no sangue decai a um nível $m > 0$, a dinâmica da distribuição da droga no organismo é descrita pelo sistema impulsivo autônomo dado pelo problema de valor inicial (3.1), (3.2) acrescido da condição de impulso

$$y(t) = m,\ t > \bar{t} \quad \Rightarrow \quad x(t+) = x(t) + d. \tag{3.4}$$

Resumidamente, a situação é descrita pelo seguinte problema impulsivo de valor inicial:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -k_1 x, \\ &\dot{y} = \quad k_1 x - k_2 y, \\ &y(t) = m,\ t > \bar{t} \quad \Rightarrow \quad x(t+) = x(t) + d, \\ &(x(0), y(0)) = (d_0, 0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Para que a solução $\phi(t; a) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$, $a = (d_0, 0)$, do problema (3.5) sofra um primeiro impulso em $t = t_1$, basta que $d_0 > 0$ seja suficientemente grande de modo que $y(\bar{t}) > m$, de acordo com (3.3). Para que haja impulsos subsequentes em $t_2 < t_3 \ldots$ é suficiente que a dose d satisfaça $d > k_2 m / k_1$. Esta condição sobre d combinada com (3.1) garante que existe $\epsilon > 0$ tal que $\dot{\phi}(t, a) > 0$ para $t_1 < t < t_1 + \epsilon$.

Na figura 2 é representada a órbita da solução $\phi(t;a)$ do problema (3.5). Ela cruza a reta $y = m$ no ponto $(\phi_1(t_0), \phi_2(t_0))$, $0 < t_0 < \bar{t}$, sem sofrer impulso. O primeiro impulso ocorre no primeiro instante $t_1 > \bar{t}$ em que a solução $(x(t), y(t))$ de (3.1), (3.2) satisfaz $y(t_1) = m$. O segundo impulso ocorre no primeiro instante $t_2 = t_1 + \tau$ de modo que $\tau > 0$ é o primeiro instante em que a solução de (3.1) com $(x(0), y(0)) = (x(t_1) + d, m)$ satisfaz $y(\tau) = m$ e assim por diante.

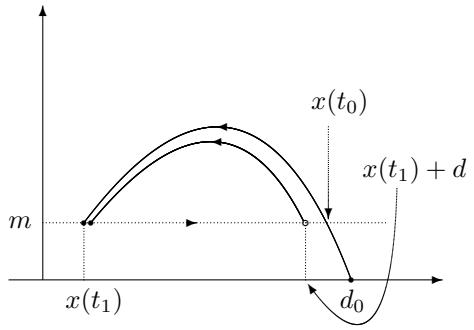


FIGURA 2.

Observe que se escolhermos $d = x(t_0) - x(t_1)$, a correspondente órbita será periódica de período $\omega = t_1 - t_0$. Assim, uma prescrição para o tratamento em questão pode ser com uma tal dose em períodos de tempo ω. Existem métodos numéricos simples para calcular ω com a precisão que se deseje. Note ainda que ω depende de d_0. Se d_0 for muito pequeno (sempre garantindo a validade de $y(\bar{t}) > m$) a dose d será muito pequena, assim como ω, o que representa desconforto para o paciente. Se d_0 for muito grande, teremos doses também muito grandes, o que em geral não é recomendável.

Uma pergunta: *O que se pode dizer no caso $k_1 = k_2$?*

3.2. **Modelos com retardamento.** Em muitos fenômenos, aplicações do princípio da causalidade envolvem um certo lapso entre uma ocorrência e seu efeito. Isto é particularmente claro nas áreas biológicas e da saúde, quando é preciso considerar períodos de gestação no estudo da dinâmica de populações, ou de incubação na propagação de doenças, etc. Com o intuito de mostrar como os sistemas impulsivos se tornam mais envolventes quando se levam em conta lapsos entre causa e efeito, vamos consider agora uma situação bem mais simples que a analisada no parágrafo 3.1.

Mantendo as notações, suponhamos que a droga seja injetada diretamente no aparelho circulatório em vez de ser administrada por via oral. A análise fica muito mais simples, uma vez que a distribuição da droga se restringe ao aparelho circulatório e o problema impulsivo de valor inicial (3.4) se reduz ao problema escalar para $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} &\dot{y} = -k\,y, \\ &y(t) = m \quad \Rightarrow \quad x(t+) = x(t) + d, \\ &y(0) = d_0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $k = k_2$ e $d_0 \geqslant m$. A solução $y(t) = d_0 e^{-k\,t}$ do problema de valor inicial $\dot{y} = -k\,y$, $y(0) = d_0$, é estritamente decrescente e $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, logo existe um único $t_1 \geqslant 0$ em que $y(t_1) = m$. Assim t_1 é o primeiro instante de impulso da solução $\phi(t; d_0)$ do problema impulsivo (3.6).

Dado $\tau > 0$, o leitor pode verificar como exercício que $\phi(t+\tau; d_0) = \phi(t; \phi(\tau; d_0))$, $t \geqslant 0$. Consequentemente, não há perda de generalidade em fixar $d_0 = m$, pois $\phi(t; m) \equiv \phi(t; d_0)$, para $t \geqslant t_1$. O primeiro instante de impulso de $\phi(t; m)$ é $t_0 = 0$ e o segundo, t_1, é facilmente calculado, pois $m = \phi(t_1; m) = (m+d)e^{-k\,t_1}$. Logo

$$t_1 = [\ln(m+d) - \ln m]/k.$$

Como $\phi(t+t_1; m) = \phi(t; \phi(t_1; m)) = \phi(t; m)$ para todo $t \geqslant 0$, segue que $\phi(t; m)$ pode ser estendida a uma solução do problema (3.6), periódica de período t_1 em $(-\infty, \infty)$.

Um modelo mais realístico do que o sistema impulsivo (3.6) deve levar em conta um lapso $\tau > 0$ entre o instante em que a droga é injetada e aquele em que ela começa a interagir com o organismo, pois esses dois eventos não costumam ser simultâneos. Neste caso o papel da equação $\dot{y} = -k\,y$ passa a ser representado por

$$\dot{y}(t) = -k\,y(t-\tau), \tag{3.7}$$

que está na classe das equações diferenciais com retardamento, as quais têm uma teoria geral bem desenvolvida, veja [1, 6, 8], por exemplo.

O problema resultante é mais complicado do que sua aparência pode sugerir. Uma diferença essencial de (3.7) para a equação $\dot{y} = -k\,y$ é que uma solução desta fica determinada por um valor inicial $y(0) = d_0$. No caso da equação (3.7) a solução não depende apenas do valor no instante $t = 0$, mas de uma história passada. É preciso especificar os valores iniciais $y(t)$ com $t \in [-\tau, 0]$ para determinar a solução em algum intervalo $[-\tau, \omega)$, $\omega > 0$. Assim, no caso da equação $\dot{y} = -ky$ o

espaço das condições iniciais (espaço de fase) é a reta $\mathbb{R}$ enquanto no caso de (3.7) o espaço de fase é um espaço de funções $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$.

Outra medida em favor de um modelo mais realístico é substituir o campo vetorial linear $-ky$ por $-f(y)$, onde f é uma função crescente contínua, $f(0) = 0$, $f'(0) = k$ e $\lim_{y\to\infty} f(y) = M < \infty$. A razão disso é que a hipótese da taxa de eliminação da droga ser proporcional à quantidade de droga só é razoável para pequenas quantidades.

O sistema impulsivo resultante é

$$\begin{aligned} &\dot{y} = -f(y(t-\tau)), \\ &y(t) = m \;\;\Rightarrow\;\; y(t+) = y(t) + d, \\ &y(0) = d_0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como já observamos, uma condição inicial para a equação $\dot{y}(t) = f(y(t-\tau))$ é uma função $\phi : [\tau, 0] \to \mathbb{R}$.

Provemos que, dada ϕ contínua, o problema de valor inicial $\dot{y}(t) = f(y(t-\tau))$, $y\big|_{[-\tau,0]} = \phi$ tem uma única solução $y : [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}$.

De fato, podemos obter y em $[0, \tau]$ integrando ambos os membros da equação de 0 a t,

$$y(t) = \phi(0) + \int_0^t f(y(s-\tau))\, ds = \phi(0) + \int_0^t f(\phi(s-\tau))\, ds, \qquad t \in [0, \tau].$$

Agora que conhecemos y em $[0, \tau]$ a podemos obter em $[\tau, 2\tau]$ pelo mesmo procedimento,

$$y(t) = y(\tau) + \int_\tau^t f(y(s-\tau))\, ds, \qquad t \in [\tau, 2\tau],$$

e assim por diante. Este procedimento é chamado *passo-a-passo*.

Observe que a condição inicial ϕ no processo que acabamos de descrever nem precisava ser contínua, bastava que fosse integrável. Na verdade, no caso de sistemas impulsivos é mais adequado tomar funções regradas como condições iniciais. Diz-se que uma função $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ é *regrada* se o limite à direita $\phi(t+)$ existe pata todo $t \in [-\tau, 0)$ e o limite à esquerda $\phi(t-)$ existe para todo $t \in (-\tau, 0]$.

Com isto em mente podemos aplicar o método passo-a-passo para explicitar a solução da equação diferencial (3.7) com a condição inicial $y\big|_{[-\tau,0]} = \phi$, onde ϕ é dada por $\phi(t) = 0$, se $t \in [-\tau, 0)$ e $\phi(0) = 1$. Temos

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [0, \tau], \\ -k\,t + k\,\tau + 1, & \text{se } t \in [\tau, 2\tau], \\ (k^2/2)t^2 - k(1 + 2k\tau)t + 2k^2\tau^2 + k\tau + 1, & \text{se } t \in [2\tau, 3\tau] \\ \text{etc.} \end{cases}$$

4. Considerações finais

O argumento que nos permitiu garantir a existência de soluções periódicas para os sistemas impulsivos ordinários (3.5) e (3.6) bem como no exemplo 2.1, depende essencialmente do fato de em algum instante de impulso t_k a condição inicial se repetir. Como o sistema é autônomo, isto acarreta que a evolução de 0 a t_k se repete de t_k a $2t_k$ e assim por diante.

No caso de um sistema impulsivo com retardamento as condições iniciais pertencem a um espaço de funções, o que implica em uma sofisticação do mencionado argumento. A repetição da condição inicial corresponde em geral a um ponto fixo de uma aplicação (de retorno) definida em um certo subconjunto fechado do espaço de fase. Veja [4, 11], por exemplo. O espaço de fase usual na teoria geral das das equações com retardamento é o espaço de Banach $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ com a norma $\|\phi\| = \sup_{-\tau \leqslant t \leqslant 0}$, $\phi \in C$, de acordo com [8], por exemplo. No caso dos sistemas impulsivos, entretanto, é mais conveniente tomar o espaço das funções regradas $G = G([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, também com a norma do sup. As referências [2, 9] contêm apresentações bastante completas do espaço $G = G([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

Referências

[1] R. Bellman and K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York, 1963.

[2] D. Fraňková, *Regulated functions*, Mathematica Bohemica, 116 (1991), pp. 20–59.

[3] M. C. Gadotti and P. Z. Táboas, *Oscillations of planar impulsive delay differential equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 48 (2005), pp. 33–47.

[4] ——, *Periodic and backset solutions of differential delay systems with self-supporting condition*, J. Differential Equations, 229 (2006), pp. 138–153.

[5] I. Györi, *Asymptotic periodicity in impulsive differential equations of retarded type with applications to compartmental models*, Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysis - Berlin, IV (1996), pp. 1403–1413.

[6] I. Györi and G. Ladas, *Oscillation Theory of Delay Differential and Delay Difference Equations and Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1991.

[7] A. Halanay and D. Wexler, *Teoria Calitativa a Sistemelor cu Impulsiori*, Acad. Rep. Soc. Romania, Bucaresti, 1968. Em romeno.

[8] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to functional-differential equations*, vol. 99 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1993.

[9] C. S. Hönig, *Volterra Stieltjes-Integral Equations. Functional Analytic Methods; Linear Constraints*, vol. 16 of Mathematics Studies, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford, 1975.

[10] E. Kruger-Thiemer, *Formal theory of drug dosage regimens*, I. Jour. Theo. Biology, 13 (1966).

[11] L. Ladeira, S. Nicola, and P. Táboas, *Periodic solutions of an impulsive differential system with delay: an L^p approach*, Fields Inst. Comm., 31 (2002), pp. 201–215.

[12] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, and P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[13] A. D. Myshkis, *Autonomous differential equations with impulsive self-support and infinite delay*, Funct. Differential Equations, 3 (1995), pp. 145–154.

[14] ——, *Vibrations of the string with energy dissipation and impulsive feedback support*, Nonlinear Anal., T. M. A., 26 (1996), pp. 1271–1278.

[15] ——, *Auto-oscillations in continuous systems with impulsive self-support*, Resenhas IME-USP, 3 (1997), pp. 93–106.

[16] S. G. Pandit and S. G. Deo, *Differential Systems Involving Impulses*, L. N. in Math. 954, Springer, Berlin, 1982.

* IGCE - Universidade Estadual Paulista, Av 24A 1515, 13506-700 Rio Claro SP.

† DM - Universidade Federal de São Carlos, Caixa Postal 676, 13560-970 São Carlos SP.

E-mail address: * `martacg@rc.unesp.br`, † `selmaj@dm.ufscar.br`

Uma introdução à identificação de sistemas dinâmicos caóticos

Kennedy Martins Pedroso[a], *Valéria Mattos da Rosa*[b]

[a] Universidade Federal de Viçosa, *Email:* kennedy.pedroso@ufv.br

[b] Universidade Federal de Juiz de Fora

Existe um grande interesse no estudo de soluções caóticas para sistemas determinísticos. No presente minicurso, vamos aprender a reconhecer o comportamento caótico em alguns modelos.

Parte I (2h) *Visual e Manipulativo*: "Chaotic Toys". Alguns aparelhos de simples manipulação serão utilizados com o intuito de evidenciar visualmente uma dinâmica caótica. O participante terá a oportunidade de manipular esses "brinquedos caóticos", e algumas perguntas naturais de cunho teórico serão realizadas nessa parte.

Parte II (2h) *Numérico*: Maple. Exemplos de sistemas dinâmicos caóticos serão tratados no software Maple. Mais uma oportunidade será dada ao participante de tentar identificar a dinâmica caótica.

Parte III (2h) *Analítico*: Melnikov. Uma das abordagens para encontrar soluções caóticas é o uso de perturbações e, nesse sentido, uma das poucas ferramentas analíticas importantes é o método descoberto por Melnikov . Exemplos completos com fundamentação rigorosa do método serão apresentados.

Referências

[1] Lynch, S. (2010) *Dynamical Systems with Applications using Maple*. Birkhäuser.

[2] Parker, T.S., Chua, L.O.(1989), *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer.

[3] Strogatz, S.H.(1989), *Nonlinear dynamics and chaos*, Perseus Books.

[4] Thomson, J. M. T., Stewart, H.B.(2002), *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley and Sons.

[5] Bollt, E. M., Klebanoff, A. (2002) A new and simple chaos toy, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **12**, 1843-1857.